Ferienakademie im Sarntal 1999

Kurs 2: Bäume – Algorithmik und Kombinatorik

Lagrange-Inversion – Beweis mit Hilfe der *Lukasiewicz*-Sprache

Edgar Frank, FAU Erlangen-Nürnberg

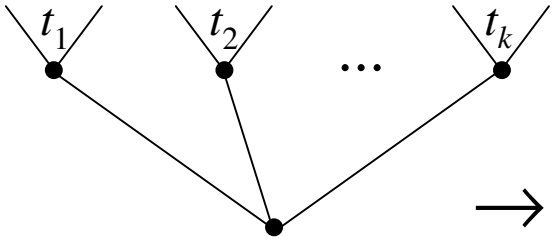
Gliederung

- *Lukasiewicz*-Sprache
  - Zusammenhang mit Bäumen
  - Cycle Lemma
- *Lagrange*-Inversionsformel
- Beweis der Inversionsformel mit Hilfe der *Lukasiewicz*-Sprache

Lukasiewicz-Sprache

- L: *Lukasiewicz*-Sprache über dem Alphabet
  $X = \{x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots\}$
- $\delta : X^* \to \mathbf{Z}$ Homomorphismus mit $\delta(x_i) = i$
- $L = \{w \in X^*; \delta(w) = -1 \wedge (w = uv, v \neq \varepsilon \to \delta(u) \geq 0)\}$
  $L = \bigcup_{k \geq 0} x_{k-1} L^k$
- $w \in L^p \leftrightarrow \delta(w) = -p \wedge (w = uv, v \neq \varepsilon \to \delta(u) > -p)$
- $w \in L^p \leftrightarrow$ genau p der Konjugierten von w liegen in L^p

- Codierung von ebenen Bäumen: $t \longrightarrow w(t)$

$t =$ 

$\longrightarrow w(t) = \mathrm{x}_{k\text{-}1} w(t_1) w(t_2) \ldots w(t_k)$

Lagrange-Inversionsformel

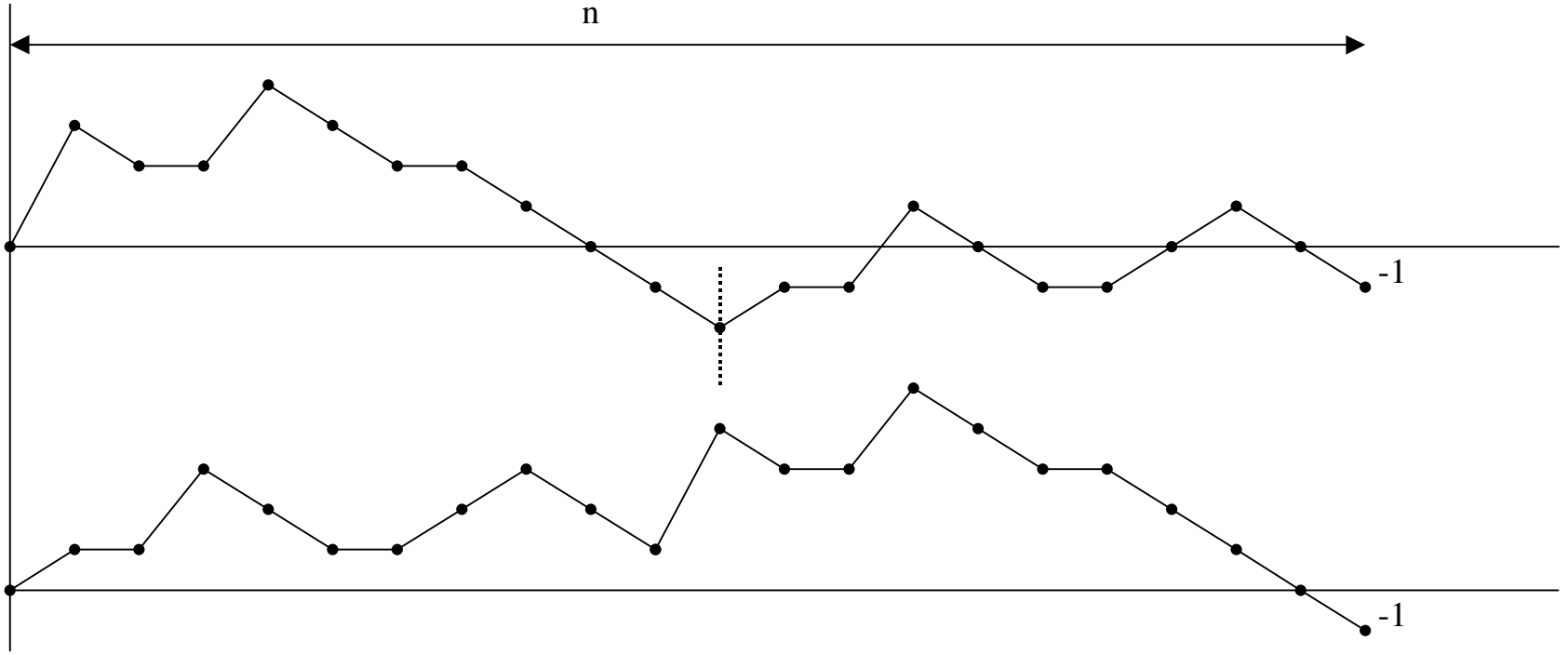
- $\Phi \in k[[z]]$ mit $\Phi(z) = \sum_{m \geq 0} a_m z^m$
- $\Phi(0) = a_0 \neq 0$ ($\leftrightarrow \Phi$ invertierbar)
- $y \in k[[z]]$ eindeutige Lösung von $y = z \cdot \Phi(y)$ mit $y(0) = 0$
- $g \in k[[z]]$
- Dann gilt: $$[z^n] g(y(z)) = \frac{1}{n} [z^{n-1}] (g'(z) \cdot \Phi(z)^n)$$
- Für $g(z) = z$: $$[z^n] y(z) = \frac{1}{n} [z^{n-1}] \Phi(z)^n$$

Beweis der Inversionsformel mit Hilfe der *Lukasiewicz*-Sprache

- $h_0: X^* \to k$ Homomorphismus mit $h_0(x_i) = a_{i+1}$
- $h: X^* \to k[[z]]$ Homomorphismus mit $h(w) = h_0(w)\ z^{|w|}$
  (fortgesetzt zu Semiring-Morphismen für Sprachen)

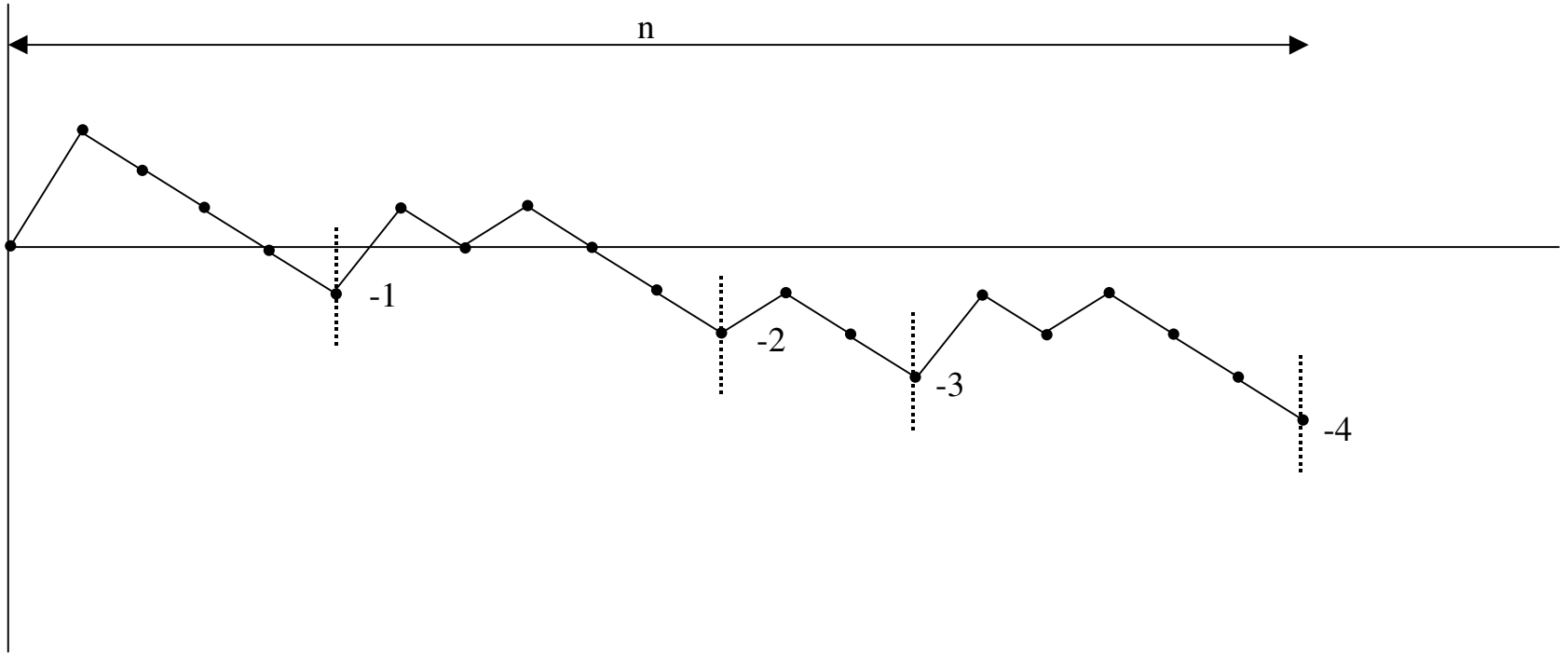
Cycle Lemma

$$\sum_{w \in \delta^{-1}(-1) \cap X^n} h_0(w) = n \cdot h_0(L \cap X^n)$$



Cycle Lemma für L^p

$$p \cdot \sum_{w \in \delta^{-1}(-p) \cap X^n} h_0(w) = n \cdot h_0(L^p \cap X^n)$$



- *h(L)* ist Lösung von $y = z \cdot \Phi(y)$

$$
\begin{aligned}
y = h(L) &= h\left(\bigcup_{n\geq 1} x_{n-1} L^n\right) \\
&= \sum_{n\geq 1} h\left(x_{n-1} L^n\right) \\
&= \sum_{n\geq 1} h\left(x_{n-1}\right) \cdot h\left(L^n\right) \\
&= z \cdot \sum_{n\geq 1} a_n \cdot h(L)^n \\
&= z \cdot \Phi\left(h(L)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= h(L) \\
&= \sum_{n\geq 1} h\left(L \cap X^n\right) \\
&= \sum_{n\geq 1} h_0\left(L \cap X^n\right) \cdot z^n \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{w \in \delta^{-1}(-1) \cap X^n} h_0(w)}_{[z^{n-1}]\Phi(z)^n} \cdot z^n
\end{aligned}
$$

Potenzen einer formalen Potenzreihe

- $\Phi \in k[[z]]$ mit $\Phi(z) = \sum_{m \geq 0} a_m z^m$

$$\Phi(z)^n = \sum_{m \geq 0} \sum_{w \in X^n \cap \delta^{-1}(m)} w \quad z^m$$

- Summe über alle Kombinationen aus n a_i, wobei die Summe der Indizes = m

- Beweis der allgemeinen *Lagrange*-Formel

$$p \cdot \sum_{w \in \delta^{-1}(-p) \cap X^n} h_0(w) = n \cdot h_0(L^p \cap X^n)$$

- Aus Linearitätsgründen genügt der Beweis für $g(z) = z^p$ (Taylor)

$$
\begin{aligned}
y^p &= h(L)^p = h\left(L^p\right) \\
&= \sum_{n\geq 1} h\left(L^p \cap X^n\right) \\
&= \sum_{n\geq 1} h_0\left(L^p \cap X^n\right) \cdot z^n \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{p}{n} \cdot \sum_{w\in \delta^{-1}(-p)\cap X^n} h_0(L^p \cap X^n) \cdot z^n \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{p}{n} \cdot \left[z^{n-p}\right] \Phi(z)^n \cdot z^n \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{p}{n} \cdot \left[z^{n-1}\right] \left(z^{p-1} \cdot \Phi(z)^n\right) \cdot z^n \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \left[z^{n-1}\right] \left(\left(z^p\right)' \cdot \Phi(z)^n\right) \cdot z^n
\end{aligned}
$$