Lagrange-Inversion – Beweis mit Hilfe der *Lukasiewicz*-Sprache

Gliederung

- *Lukasiewicz*-Sprache
  - Zusammenhang mit Bäumen
  - Cycle Lemma
- *Lagrange*-Inversionsformel
- Beweis der Inversionsformel mit Hilfe der *Lukasiewicz*-Sprache

Lukasiewicz-Sprache

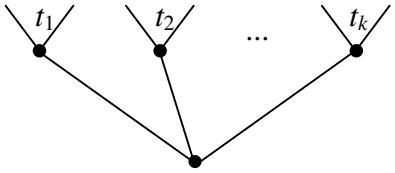
- L: *Lukasiewicz*-Sprache über dem Alphabet $X = \{x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ...\}$

$$L = \bigcup_{k \geq 0} x_{k-1} L^k$$

- $\delta : X^* \to \mathbf{Z}$ Homomorphismus mit $\delta(x_i) = i$
- $L = \{w \in X^*; \delta(w) = -1 \wedge (w = uv, v \neq \varepsilon \to \delta(u) \geq 0)\}$

- $w \in L^p \leftrightarrow \delta(w) = -p \wedge (w = uv, v \neq \varepsilon \to \delta(u) > -p)$
- $w \in L^p \leftrightarrow$ genau p der Konjugierten von w liegen in L^p

- Codierung von ebenen Bäumen: $t \to w(t)$

$t =$ 

$$\to w(t) = x_{k-1} w(t_1) w(t_2) \ldots w(t_k)$$

Lagrange-Inversionsformel

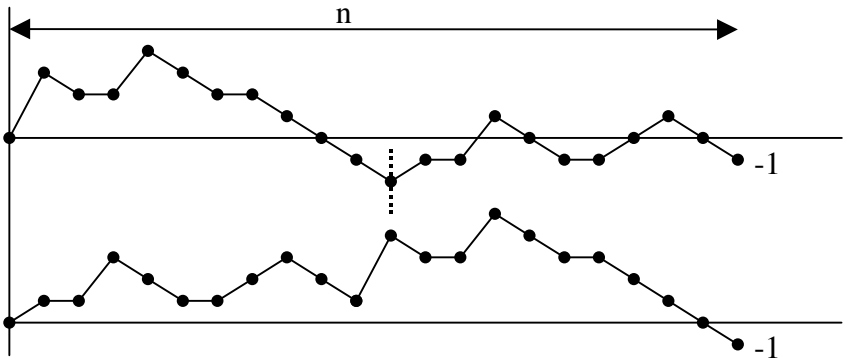
- $\Phi \in k[[z]]$ mit $\Phi(z) = \sum_{m \geq 0} a_m z^m$
- $\Phi(0) = a_0 \neq 0$ ($\leftrightarrow \Phi$ invertierbar)
- $y \in k[[z]]$ eindeutige Lösung von $y = z \cdot \Phi(y)$ mit $y(0) = 0$
- $g \in k[[z]]$
- Dann gilt: $[z^n] g(y(z)) = \frac{1}{n} [z^{n-1}] (g'(z) \cdot \Phi(z)^n)$
- Für $g(z) = z$: $[z^n] y(z) = \frac{1}{n} [z^{n-1}] \Phi(z)^n$

Beweis der Inversionsformel mit Hilfe der *Lukasiewicz*-Sprache

- $h_0: X^* \to k$ Homomorphismus mit $h_0(x_i) = a_{i+1}$
- $h: X^* \to k[[z]]$ Homomorphismus mit $h(w) = h_0(w)\, z^{|w|}$
  (fortgesetzt zu Semiring-Morphismen für Sprachen)

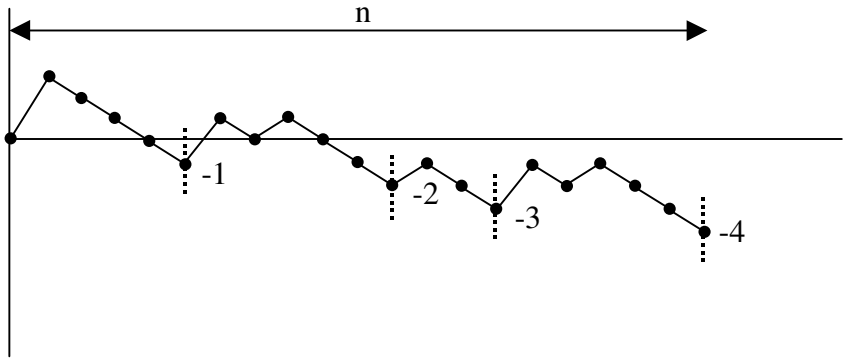
Cycle Lemma

$$\sum_{w \in \delta^{-1}(-1) \cap X^n} h_0(w) = n \cdot h_0(L \cap X^n)$$



Cycle Lemma für L^p

$$p \cdot \sum_{w \in \delta^{-1}(-p) \cap X^n} h_0(w) = n \cdot h_0(L^p \cap X^n)$$



- $h(L)$ ist Lösung von $y = z \cdot \Phi(y)$

$$y = h(L) = h\left(\bigcup_{n\geq 1} x_{n-1} L^n\right) = \sum_{n\geq 1} h\left(x_{n-1} L^n\right) = \sum_{n\geq 1} h\left(x_{n-1}\right) \cdot h\left(L^n\right)$$
$$= z \cdot \sum_{n\geq 1} a_n \cdot h(L)^n = z \cdot \Phi(h(L))$$

$$y = h(L) = \sum_{n\geq 1} h\left(L \cap X^n\right) = \sum_{n\geq 1} h_0\left(L \cap X^n\right) \cdot z^n$$
$$= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{w \in \delta^{-1}(-1) \cap X^n} h_0(w)}_{[z^{n-1}]\Phi(z)^n} \cdot z^n$$

Potenzen einer formalen Potenzreihe

- $\Phi \in k[[z]]$ mit $\Phi(z) = \sum_{m\geq 0} a_m z^m$

$$\Phi(z)^n = \sum_{m\geq 0} \sum_{w \in X^n \cap \delta^{-1}(m)} w \; z^m$$

- Summe über alle Kombinationen aus n a_i, wobei die Summe der Indizes = m

Beweis der allgemeinen Lagrange-Formel

$$p \cdot \sum_{w \in \delta^{-1}(-p) \cap X^n} h_0(w) = n \cdot h_0(L^p \cap X^n)$$

- Aus Linearitätsgründen genügt der Beweis für $g(z) = z^p$ (Taylor)

$$y^p = h(L)^p = h\left(L^p\right) = \sum_{n\geq 1} h\left(L^p \cap X^n\right) = \sum_{n\geq 1} h_0\left(L^p \cap X^n\right) \cdot z^n$$
$$= \sum_{n\geq 1} \frac{p}{n} \cdot \sum_{w \in \delta^{-1}(-p) \cap X^n} h_0(L^p \cap X^n) \cdot z^n = \sum_{n\geq 1} \frac{p}{n} \cdot [z^{n-p}]\Phi(z)^n \cdot z^n$$
$$= \sum_{n\geq 1} \frac{p}{n} \cdot [z^{n-1}]\left(z^{p-1} \cdot \Phi(z)^n\right) \cdot z^n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} [z^{n-1}]\left(\left(z^p\right)' \cdot \Phi(z)^n\right) \cdot z^n$$