$\mathcal{B}$: Binärbäume, definiert durch Strukturgleichung:

$$\mathcal{B} = 1 + \mathcal{B} \cdot \mathcal{B}$$

$|\beta| :=$ Anzahl der inneren Knoten von $\beta \in \mathcal{B}$
$\mathcal{B}_n$: Binärbäume mit n inneren Knoten, mit Rekursion

$$\mathcal{B}_{n+1} = \sum_{i+j=n} \mathcal{B}_i \times \mathcal{B}_j$$

$c_n := \sharp\mathcal{B}_n$: Catalan-Zahlen, mit erzeugender Funktion

$$c(z) := \sum_{n \geq 0} c_n\, z^n = \sum \{\, z^{|\beta|}\,;\ \beta \in \mathcal{B}\,\}$$

Funktionalgleichung

$$c(z) = 1 + z \cdot c(z)^2$$

Lösung der quadratischen Gleichung

$$c(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$$

Binomialreihe

$$(1-z)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n$$
$$\text{mit } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

explizite Formel für die Catalan-Zahlen

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Stirlings Formel

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Asymptotik der Catalan-Zahlen

$$c_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4^n}{n^{3/2}}$$

mittlere (innere) Weglänge in Binärbäumen

Für $\beta \in \mathcal{B}, v \in \beta : \tau_\beta(v) =$ Tiefe von Knoten v in β
innere Weglänge von β :

$$\lambda(\beta) = \sum \{ \tau_\beta(v) \,;\, v \text{ innerer Knoten von } \beta \}$$
$$\lambda(\beta)/n \;:\; \text{mittlere Tiefe der inneren Knoten von } \beta$$

Wie gross ist dieser Wert im Mittel, falls $\beta \in \mathcal{B}_n$ mit Gleichverteilung zufällig gewählt wird ?
kumulierte innere Weglänge

$$d_n := \sum \{ \lambda(\beta) \,;\, \beta \in \mathcal{B}_n \}$$

erzeugende Funktion

$$d(z) = \sum_{n \geq 0} d_n\, z^n = \sum \{ \lambda(\beta)\, z^\beta \,;\, \beta \in \mathcal{B} \}$$

Rekursion

$$\beta = (\beta_l, \beta_r) \Rightarrow \lambda(\beta) = \lambda(\beta_l) + \lambda(\beta_r) + |\beta_l| + |\beta_r|$$

Folgerung

$$\begin{aligned} d(z) &= \sum_{\beta_l, \beta_r \in \mathcal{B}} (\lambda(\beta_l) + \lambda(\beta_r) + |\beta_l| + |\beta_r|)\, z^{|\beta_l| + |\beta_r| + 1} \\ &= 2 \cdot z \cdot c(z) \cdot d(z) + 2 \cdot z^2 \cdot c(z) \cdot c'(z) \end{aligned}$$

Explizite Lösung

$$d(z) = \frac{2\, z^2\, c(z)\, c'(z)}{1 - 2\, z\, c(z)}$$

Mittels

$$\begin{aligned} 1 - 2zc(z) &= \sqrt{1 - 4z} \\ z\, c'(z) &= -c(z) + 1/\sqrt{1 - 4z} \end{aligned}$$

ergibt sich

$$z\,d(z) = \frac{z}{1-4z} - \frac{1-z}{\sqrt{1-4z}} + 1$$

und durch Reihenentwicklung

$$d_n = 4^n - \frac{3n+1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} &\text{mittlere innere Weglänge in } \mathcal{B}_n = \\ &\qquad = \frac{d_n}{c_n} = \frac{(n+1)\,4^n}{\binom{2\,n}{n}} - 3\,n - 1 \\ &\qquad \sim \sqrt{\pi}\,n^{3/2} - 3\,n + \mathcal{O}(\sqrt{n}) \end{aligned}$$