Symbolisches Differenzieren (Beispiel)

```
expr ::= (expo,expr) | (plus,expr,expr)| x

diff : (expo,expr) -> (times,(expo,copy(expr)),diff(expr))

       (plus,expr_1,expr_2) -> (plus,diff(expr_1),diff(expr_2))

       x -> 1
```

Anzahl der `expr`-Bäume fester Grösse

$$t_n := \sharp\{\, f \in \texttt{expr}\,;\ |f| = n \,\}$$

erzeugende Funktion für `expression`

$$\begin{aligned} T(z) &= \sum_{n\geq 0} t_n\, z^n = \sum\{\, z^{|f|};\ f \in \texttt{expr} \,\} \\ &= z + z^2 + 2z^3 + 4z^4 + 9z^5 + \ldots \end{aligned}$$

Funktionalgleichung für $T(z)$:

$$T(z) = z \cdot T(z) + z \cdot T(z)^2 + z$$

Lösung der quadratischen Gleichung

$$T(Z) = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^3}}{2z}$$

Kosten des Differenzierens

$$\tau_{\texttt{diff}}(f) := |\texttt{diff}(f)|$$

Rekursive Beziehungen

$$\begin{aligned} \tau_{\texttt{diff}}(\texttt{x}) &= 1 \\ \tau_{\texttt{diff}}(\texttt{expo}, f) &= 2 + |f| + \tau_{\texttt{diff}}(f) \\ \tau_{\texttt{diff}}(\texttt{plus}, f, g) &= 1 + \tau_{\texttt{diff}}(f) + \tau_{\texttt{diff}}(g) \end{aligned}$$

erzeugende Funktion der Kosten

$$
\begin{aligned}
D(z) &= \sum_{f \in \texttt{expr}} \tau_{\texttt{diff}}(f)\, z^{|f|} = \sum_{n \geq 0} d_n\, z^n \\
&= z + 4z^2 + 11z^3 + 33z^4 + 95z^5 + 283z^6 + \dots \\
&= z + \sum_{g \in \texttt{expr}} (2 + |g| + \tau_{\texttt{diff}}(g))^{1+|g|} \\
&\quad + \sum_{g,h \in \texttt{expr}} (1 + \tau_{\texttt{diff}}(g) + \tau_{\texttt{diff}}(h))^{1+|g|+|h|} \\
&= z \cdot \big(1 + 2T(z) + zT'(z) + D(z) + T^2(z) + 2D(z)T(z)\big) \\
&= z \cdot \frac{1 + 2\,T(z) + zT'(z) + T^2(z)}{\sqrt{1 - 2z - 3z^3}}
\end{aligned}
$$

Probleme:

- die Koeffizienten t_n, d_n haben keine “geschlossene Form”, aus der man mittels der Stirling-Formel deren asymptotisches Verhalten erschliessen könnte
- die Wachstumsaussagen, die man aus der Betrachtung des Konvergenzradius der Reihen $T(z)$ und $D(z)$ erhält, sind nutzlos, da beide Reihen den gleichen Konvergenzradius haben ($\rho = 1/3$)

Man benötigt stärkere Hilfsmittel, wie z.B.

$$
[z^n](1-z)^{-\alpha} = \binom{n+\alpha-1}{n} \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2n} + \dots\right]
$$

für $\alpha \notin \{0, -1, -2, -3, \dots\}$
Dies führt auf

$$
\begin{aligned}
t_n &= \sqrt{\frac{3}{4\pi n^3}}\, 3^n - \frac{45}{32} \frac{3^n}{\sqrt{3\pi n^5}} + \mathcal{O}\left(\frac{3^n}{n^{7/2}}\right) \\
d_n &= \frac{3^n}{4} \left[1 + \mathcal{O}(\frac{1}{n})\right] \\
\frac{d_n}{t_n} &\sim \sqrt{\frac{\pi}{12}}\, n^{3/2}
\end{aligned}
$$

Average-case Komplexität des symbolischen Differenzierens (mit Kopieren): $\mathcal{O}(n^{3/2})$