Beweis der Lagrange Formel

– Vorbemerkung:
Ist $h = h(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ eine bezüglich Multiplikation invertierbare formale Reihe, also $h(0) \neq 0$, so gilt

$$[z^n]\, z^k\, h^{n-k+1}\, D(z\, h^{-1}) = \delta_{n,k}$$

Das gilt sicher für $k > n$ wegen des Faktors z^k. Für $k \leq n$ schliesst man so:

$$\begin{aligned}
[z^n]\, z^k\, h^{n-k+1}\, D(z\, h^{-1}) &= [z^{n-k}]\, h^{n-k+1}\, (h^{-1} - z\, h^{-2}\, D\, h) \\
&= [z^{n-k}]\, (h^{n-k} - z\, h^{n-k-1}\, D\, h) \\
&= \begin{cases} [z^0]\, (1 - z\, h^{-1}\, D\, h) = 1 & n = k \\ [z^{n-k}]\, h^{n-k} - \frac{1}{n-k}\, [z^{n-k-1}]\, D\, h^{n-k} = 0 & n > k \end{cases}
\end{aligned}$$

– Ist $f = f(z)$ eine bezüglich Komposition invertierbare formale Reihe (also $f(0) = 0$ und $(Df)(0) \neq 0$), so bezeichne $g = g(z)$ dieses Inverse und $h = h(z)$ das Inverse von $f(z)/z$ bezüglich der Multiplikation. Behauptet wird also

$$[z^n]\, g^k = \frac{k}{n}\, [z^{n-k}]\, h^n$$

Die Definition von g lässt sich äquivalent ausdrücken

$$\begin{aligned}
f \circ g = z \;&\Leftrightarrow\; f^k \circ g = z^k \quad (k \in \mathbb{N}) \\
&\Leftrightarrow\; [z^n]\, (f^k \circ g) = \delta_{n,k} \quad (k, n \in \mathbb{N}) \\
&\Leftrightarrow\; \sum_{\ell} [z^\ell]\, f^k \cdot [z^n]\, g^\ell = \delta_{n,k} \quad (k, n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

Dass die Behauptung richtig ist, rechnet man anhand des letzten Kriteriums einfach nach

$$\begin{aligned}
\sum_{l} [z^\ell]\, f^k \cdot \frac{\ell}{n}\, [z^{n-\ell}]\, h^n &= \sum_{\ell} \frac{k}{n}\, [z^\ell]\, z\, f^{k-1}\, D\, f \cdot [z^{n-\ell}]\, h^n \\
&= \frac{k}{n}\, [z^n]\, h^n\, z\, f^{k-1}\, D\, f = \frac{k}{n}\, [z^n]\, z^k\, h^{n-k+1}\, D(z\, h^{-1})
\end{aligned}$$

und somit folgt alles aus der obigen Behauptung.