Formale Reihen (mit komplexen Koeffizienten)

$$f(z) = f_0 + f_1\, z + f_2\, z^2 + \ldots = \sum_{n \geq 0} f_n\, z^n \;\leftrightarrow\; \mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, \ldots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

Operationen auf formalen Reihen

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n\, z^n \;\leftrightarrow\; \mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, \ldots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$
$$g(z) = \sum_{n \geq 0} g_n\, z^n \;\leftrightarrow\; \mathbf{g} = (g_0, g_1, g_2, \ldots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

– Koeffizientenextraktion

$$[z^n]f(z) = f_n$$

– Addition $\mathbf{f} + \mathbf{g}$

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z) = \sum_{n \geq 0} (f_n + g_n) z^n \;\leftrightarrow\; (f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots)$$

– Skalarmultiplikation $c \cdot \mathbf{f}$

$$(c \cdot f)(z) = \sum_{n \geq 0} (c \cdot f_n)\, z^n \;\leftrightarrow\; (cf_0, cf_1, cf_2, \ldots)$$

– Multiplikation $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$

$$(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} (f_k g_{n-k}) \right) z^n$$
$$\leftrightarrow\; (f_0 g_0, f_0 g_1 + f_1 g_0, f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0, \ldots)$$

– Ableitung

$$(Df)(z) = f'(z) = \sum_{n \geq 0} (n+1) f_{n+1} z^n \;\leftrightarrow\; (f_1, 2f_2, 3f_3, \ldots,)$$

Eigenschaften

– Die formalen Reihen bilden bezüglich Addition und Skalarmultiplikation einen Vektorraum und bezüglich Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring $\mathbb{C}[[z]]$.
Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen Unterring gemäss

$$c = c + 0z + 0z^2 + \ldots \;\leftrightarrow\; (c, 0, 0, 0, \ldots)$$

Neutrales Element bezüglich Addition

$$\mathbf{0} = 0 + 0\,z + 0\,z^2 + \ldots \;\leftrightarrow\; (0, 0, 0, \ldots)$$

Neutrales Element bezüglich Addition

$$\mathbf{1} = 1 + 0\,z + 0\,z^2 + \ldots \;\leftrightarrow\; (1, 0, 0, \ldots)$$

- Die formalen Reihen, bei denen nur endlich viele Koeffizienten $\neq 0$ sind, bilden den Vektorraum und Ring der Polynome $\mathbb{C}[z]$.
- Invertierbare Reihen ("Einheiten") bezüglich der Multiplikation sind genau die Reihen $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n\, z^n$ mit $f_0 \neq 0$.
- Die Ableitung D hat die üblichen Eigenschaften, d.h. Linearität und

$$D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + f \cdot (Dg)$$

Wichtige Reihen

- Binomialreihe (für $\alpha \in \mathbb{C}$)

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n}\, z^n \;\leftrightarrow\; (1, \alpha, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}, \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}, \ldots)$$

  wobei $\binom{\alpha}{n} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)/n!$
  N.B. $(1+z)^\alpha \in \mathbb{C}[z] \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{N}$

- Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\, z^n \;\leftrightarrow\; (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots,)$$

- logarithmische Reihe

$$\log(1-z) = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\, z^n \;\leftrightarrow\; (0, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots,)$$

Die erwarteten Eigenschaften gelten

$$\begin{aligned}(1+z)^\alpha \cdot (1+z)^\beta &= (1+z)^{\alpha+\beta} \\ [(1+z)^\alpha]^{-1} &= (1+z)^{-\alpha} \\ (D\exp)(z) &= \exp(z) \\ D\log(1-z) &= -(1-z)^{-1}\end{aligned}$$

Eine weitere wichtige Operation: Komposition

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = \sum_{n \geq 0} f_n \cdot g(z)^n$$

(Hierbei sollte $g_0 = 0$ oder $f(z)$ ein Polynom sein)
Das bedeutet

$$[z^n](f \circ g)(z) = \sum_{1 \leq k \leq n} f_k \, b_{n,k}(g_1, g_2, g_3, \ldots)$$

wobei die $b_{n,k}(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ folgende Polynome sind

$$b_{n,k}(y_1, y_2, y_3, \ldots) = \sum \frac{k!}{k_1! \, k_2! \cdots k_n!} \, y_1^{k_1} y_2^{k_2} \ldots y_n^{k_n}$$

Dabei läuft die Summation über alle n-Tupel $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$ und $1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \ldots + n \cdot k_n = n$
("Formel von Faa di Bruno")
Es gilt die Kettenregel

$$D(f \circ g)(z) = [(Df) \circ g]\,(z) \cdot (Dg)(z)$$

und damit auch

$$\log(\exp(z)) = z \ , \ \ \exp(\log(1-z)) = z$$

Weitere Rechenregeln zur Komposition

$$\begin{aligned}
\log(1+z)^\alpha &= \alpha \cdot \log(1+z) \\
((1+z)^\alpha)^\beta &= (1+z)^{\alpha+\beta} \\
\exp(f(z) + g(z)) &= \exp(f(z)) \cdot \exp(g(z)) \\
[\exp(f(z))]^{-1} &= \exp(-f(z)) \\
D(1+z)^\alpha &= \alpha \cdot (1+z)^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

Wichtige Eigenschaften der Komposition

- neutrales Element bezüglich Komposition ist $z \leftrightarrow (0, 1, 0, 0, \ldots)$
- $f(z) \leftrightarrow (f_0, f_1, f_2, \ldots)$ ist invertierbar bezüglich Komposition $\iff f_0 = 0$ und $f_1 \neq 0$
- die bezüglich Komposition invertierbaren formalen Reihen bilden eine (nichtkommutative !) Gruppe

Zur Berechnung der Kompositions-Inversen

$$g \circ f = f \circ g = z \iff [z^n]\, g(z) = \frac{1}{n} \, [z^{n-1}] \left(\frac{f(z)}{z} \right)^{-n}$$

("Inversionsformel von Lagrange")

Zur Motivation

- Viele komplexe kombinatorische Strukturen und Datenstrukturen lassen sich aus sehr einfachen Strukturen mittels einfacher Operationen (Vereinigung, Menge, Produkt, Liste, ...) gewinnen.

- Die Zählfunktionen ("erzeugenden Funktionen) für die komplexeren Strukturen lassen sich durch die entsprechenden Operationen auf den zugehörigen formalen Reihen gewinnen ("symbolic method") — entsprechendes gilt auch für die zugeordneten Kostenfunktionen für Algorithmen auf diesen Strukturen

- Baumstrukturen entstehen oft mittels rekursiver Definition. Die zugehörigen erzeugenden Funktionen $f(z)$ sind dann zunächst auch nur bekannt durch implizite Gleichungen wie

  $$f(z) = z \cdot G(f(z)) \quad \text{d.h.} \quad \frac{f(z)}{G(f(z))} = \frac{z}{G(z)} \circ f(z) = z$$

  wobei $[z^0]\, G(z) \neq 0$. Die "Lösung" $f(z)$ einer solchen Gleichung in $\mathbb{C}[[z]]$ ist eindeutig bestimmt und es gilt (nach Lagrange)

  $$[z^n]\, f(z) = \frac{1}{n}\, [z^{n-1}]\, G(z)^n$$

Beispiele:

- Die kombinatorische Struktur von Binärbäumen führt auf die Funktionalgleichung (für $c(z) = \sum_n c_n\, z^n$)

  $$c(z) = 1 + z \cdot c(z)^2$$

  (die man wie eine gewöhnliche quadratische Gleichung lösen kann). Setzt man $e(z) := z \cdot c(z)$, so gilt

  $$e(z) = z + e(z)^2 \quad , \text{ also } \quad e(z) = \frac{z}{1 - e(z)}$$

  und dies führt mit $G(z) = (1-z)^{-1}$ auf

  $$[z^n]\, c(z) = [z^{n+1}]\, e(z) = \frac{1}{n}\, [z^n]\, (1-z)^{-n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

- Die kombinatorische Struktur von gewurzelten Bäumen führt auf die Funktionalgleichung (für $\sum_n a_n z^n / n!$)

  $$a(z) = z \cdot e^{a(z)}$$

  und dies führt mit $G(z) = e^z$ auf

  $$a_n = n!\, [z^n]\, a(z) = n!\, \frac{1}{n}\, [z^{n-1}]\, e^{nz} = n^{n-1}$$