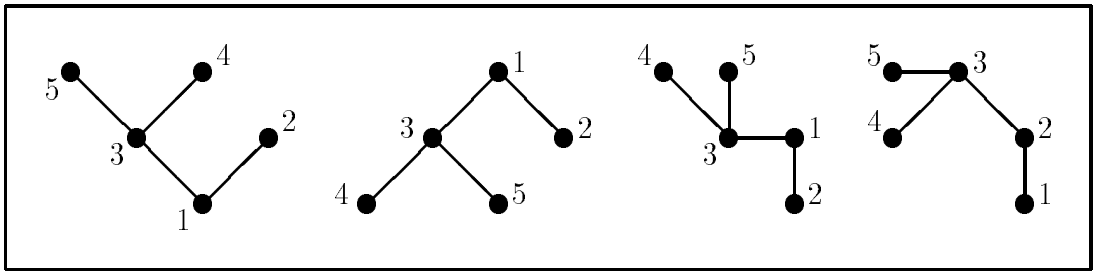
Cayleys Formel
Drei Beweise durch geschicktes Zählen

Marc Wagner
mcwagner@stud.informatik.uni-erlangen.de
Ferienakademie, September 1999

- Beweis durch die Formel von Moon
- Beweis durch Rekursion von Riordan und Rényi
- Beweis durch doppeltes Zählen

Labeled Trees (nummerierte Bäume)

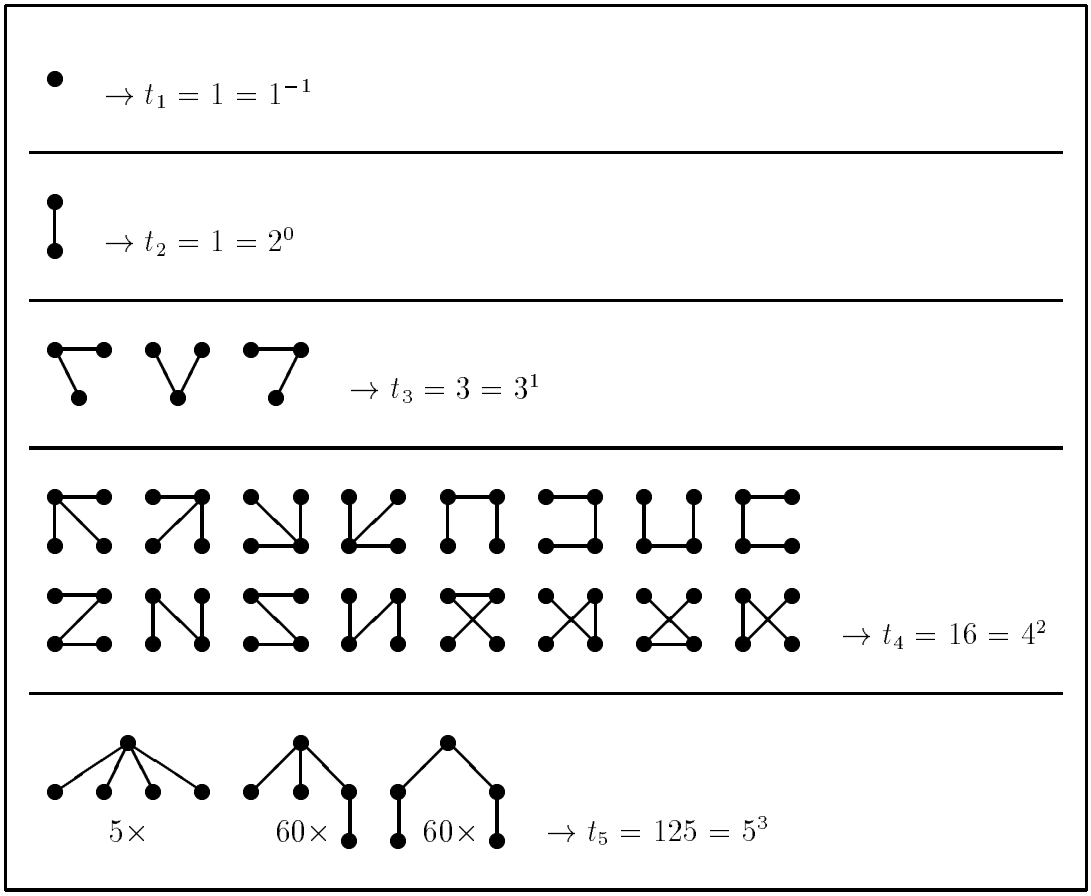
- Zusammenhängende, ungerichtete Graphen ohne Zyklen
- Eindeutig durchnummerierte Knoten
- Keine ausgezeichneten Wurzeln



Labeled Trees (die ersten drei sind gleich)

Cayleys Formel

- t_n ist die Anzahl aller Labeled Trees mit n Knoten



Alle Labeled Trees mit 1, 2, 3, 4, 5 Knoten

- Cayleys Formel:

$$t_n = n^{n-2}$$

Multinomialkoeffizienten

- Definition (Multinomialkoeffizienten):

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum \binom{n}{r_1, \ldots, r_k} x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k}$$

- Summe über alle $(r_1, \ldots, r_k)$ für die gilt $r_i \geq 0$ und $r_1 + \ldots + r_k = n$

- Rekursionsformel:

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = (x_1 + \ldots + x_k)^{n-1}(x_1 + \ldots + x_k)$$

$$\sum \binom{n}{r_1, \ldots, r_k} x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k} =$$

$$= \left[\sum \binom{n-1}{s_1, \ldots, s_k} x_1^{s_1} \ldots x_k^{s_k}\right](x_1 + \ldots + x_k)$$

$$\binom{n}{r_1, \ldots, r_k} x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k} =$$

$$= \left[\binom{n-1}{r_1 - 1, \ldots, r_k} x_1^{r_1 - 1} \ldots x_k^{r_k}\right] x_1 + \ldots +$$

$$+ \left[\binom{n-1}{r_1, \ldots, r_k - 1} x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k - 1}\right] x_k$$

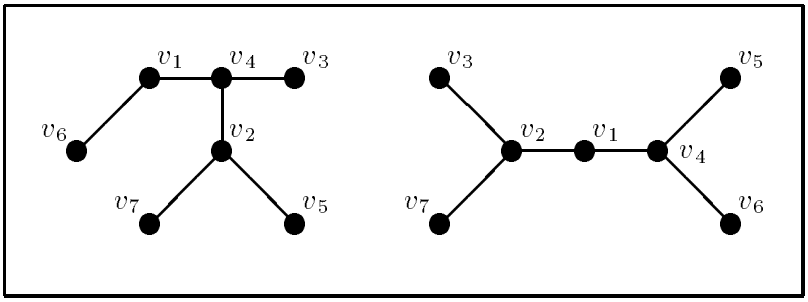
$$\binom{n}{r_1, \ldots, r_k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{r_1, \ldots, r_i - 1, \ldots, r_k}$$

- Ferner gilt:

$$\binom{n}{r_1, \ldots, r_k} = \binom{n}{r_1, \ldots, r_k, 0}$$

Aufstellen einer rekursiven Formel

- $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist die Knotenmenge
- $t(n; d_1, \ldots, d_n)$ ist die Anzahl aller Labeled Trees für die gilt $d_i = Grad(v_i)$



Zwei der von $t(7; 2, 3, 1, 3, 1, 1, 1)$ gezählten Bäume

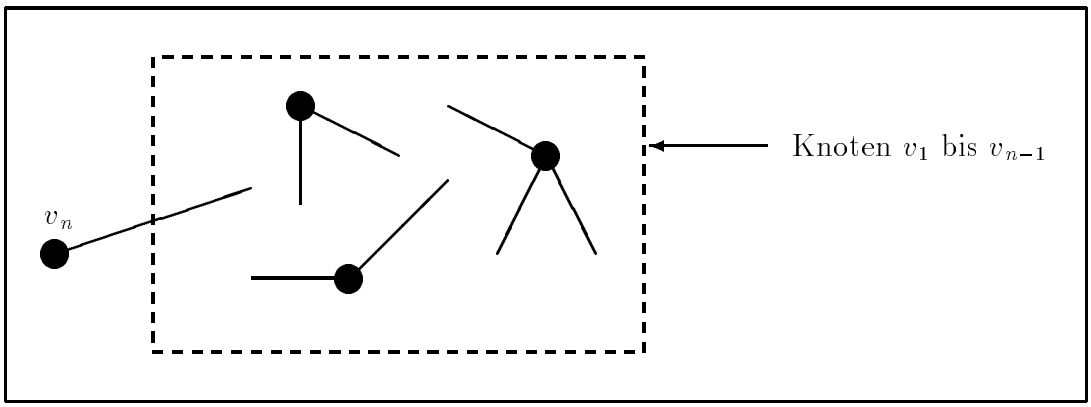
- Für jeden Baum mit n Knoten gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$$

Aufstellen einer rekursiven Formel

- Annahme: $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$
- $n \geq 2 \rightarrow v_n = 1$
- Rekursionsformel:

$$t(n; d_1, \ldots, d_{n-1}, 1) = \\ = \sum_{i=1}^{n-1} t(n-1; d_1, \ldots, d_i - 1, \ldots, d_{n-1})$$



Formel von Moon

- Formel von Moon:

$$t(n; d_1, \ldots, d_n) = \binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1}$$

- Gilt für $n \geq 3$
- Induktionsanfang
  $n = 3$:

$$t(3; 2, 1, 1) = 1 = \binom{1}{1, 0, 0}$$
$$t(3; 1, 2, 1) = 1 = \binom{1}{0, 1, 0}$$
$$t(3; 1, 1, 2) = 1 = \binom{1}{0, 0, 1}$$

- Induktionsannahme
  Die Formel von Moon gilt für Bäume mit $n - 1$ Knoten
- Induktionsschluss

$$t(n; d_1, \ldots, d_n) = \; t(n; d_1, \ldots, d_{n-1}, 1) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} t(n-1; d_1, \ldots, d_i - 1, \ldots, d_{n-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-3}{d_1 - 1, \ldots, d_i - 2, \ldots, d_{n-1} - 1} =$$

Formel von Moon

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n-2}{d_1-1,\ldots,d_{n-1}-1} = \\
&= \binom{n-2}{d_1-1,\ldots,d_{n-1}-1,0} = \\
&= \binom{n-2}{d_1-1,\ldots,d_n-1}
\end{aligned}
$$

Beweis von Cayleys Formel

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum \binom{n}{r_1, \ldots, r_k} x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k}$$

$$(x_1 + \ldots + x_k)^{n-2} = \sum \binom{n-2}{r_1, \ldots, r_k} x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k}$$

$$(x_1 + \ldots + x_n)^{n-2} = \sum \binom{n-2}{r_1, \ldots, r_n} x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n}$$

$$(x_1 + \ldots + x_n)^{n-2} =$$

$$= \sum \binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1} x_1^{d_1 - 1} \ldots x_n^{d_n - 1}$$

$$n^{n-2} = \sum \binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1}$$

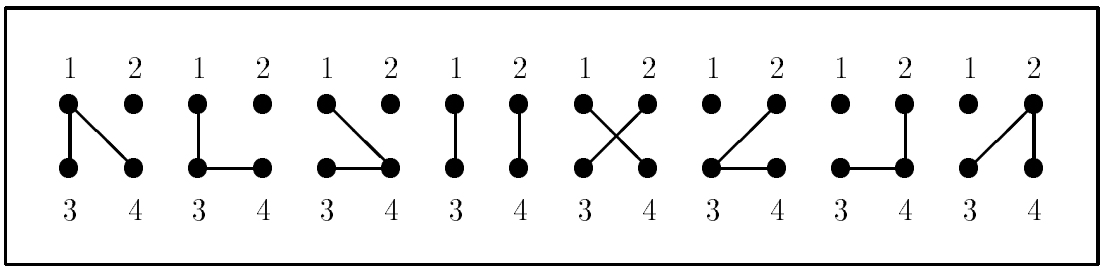
$$n^{n-2} = \sum t(n; d_1, \ldots, d_n)$$

- Gilt für $n \geq 3$
- Summe über alle $(d_1, \ldots, d_n)$ für die gilt $d_i \geq 1$ und $d_1 + \ldots + d_n = 2n - 2$

$$t_n = \sum t(n; d_1, \ldots, d_n)$$
$$t_n = n^{n-2}$$

Aufstellen einer rekursiven Formel

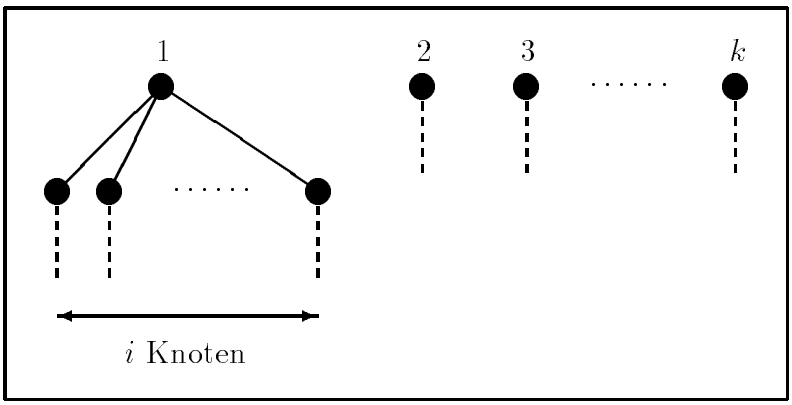
- $V = \{1, \ldots, n\}$ ist die Knotenmenge
- A ist eine beliebige k-elementige Teilmenge von V
- $t_{n,k}$ ist die Anzahl aller Planted Forests, bestehend aus k Bäumen, bei denen die k Wurzeln gerade die Menge A bilden



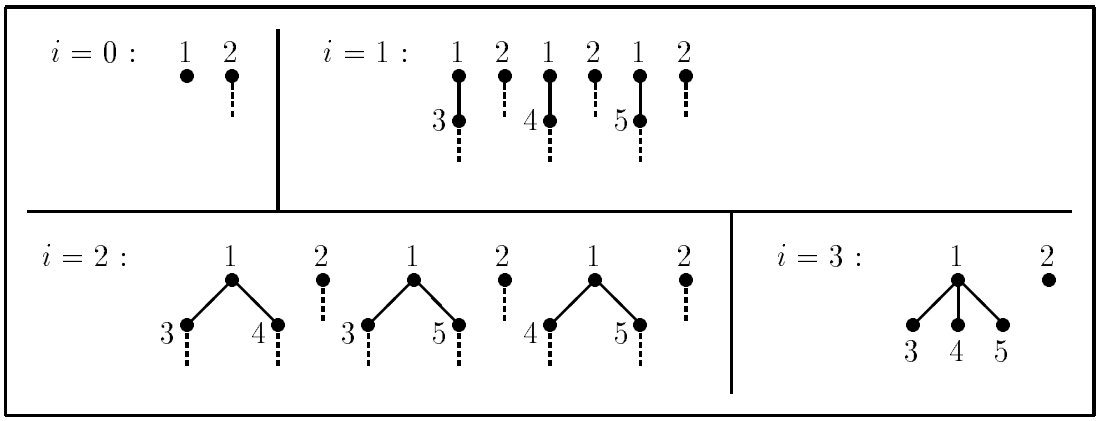
$t_{4,2} = 8$ für $A = \{1, 2\}$

- Rekursionsformel:

$$t_{n,k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} t_{n-1,k-1+i}$$



Aufstellen einer rekursiven Formel



Der erste Rekursionsschritt für $n = 5$ und $A = \{1, 2\}$

Beweis der Gleichung $t_{n,k} = kn^{n-k-1}$

- Induktionsanfang
  $n = 1$: $t_{1,1} = 1$
- Induktionsannahme
  $t_{n,k} = kn^{n-k-1}$ gilt für $n - 1$
- Induktionsschluss

$$t_{n,k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} t_{n-1,k-1+i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (k-1+i)(n-1)^{n-1-k-i} =$$

$$= \sum_{i=n-k}^{0} \binom{n-k}{n-k-i} (n-1-i)(n-1)^{i-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (n-1)^i - \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} i(n-1)^{i-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (n-1)^i 1^{n-k-i} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-k} \frac{(n-k)!}{i!(n-k-i)!} i(n-1)^{i-1} =$$

$$= (n-1+1)^{n-k} -$$

$$-(n-k) \sum_{i=1}^{n-k} \frac{(n-k-1)!}{(i-1)!(n-k-i)!} (n-1)^{i-1} =$$

Beweis der Gleichung $t_{n,k} = kn^{n-k-1}$

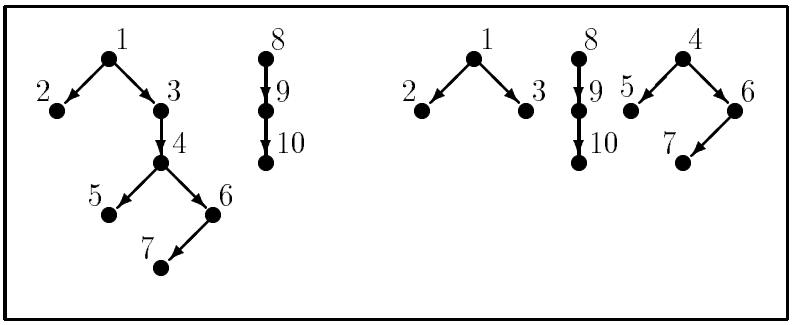
$$
\begin{aligned}
&= n^{n-k} - (n-k) \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-k-1}{i-1} (n-1)^{i-1} = \\
&= n^{n-k} - \\
&\qquad -(n-k) \sum_{i=0}^{n-k-1} \binom{n-k-1}{i} (n-1)^{i} 1^{n-k-1-i} = \\
&= n^{n-k} - (n-k)(n-1+1)^{n-k-1} = \\
&= n^{n-k} - (n-k)n^{n-k-1} = kn^{n-k-1}
\end{aligned}
$$

Beweis von Cayleys Formel

- $t_{n,k} = kn^{n-k-1}$
- $t_{n,1} = n^{n-2}$
- $t_n = n^{n-2}$

Planted Forests

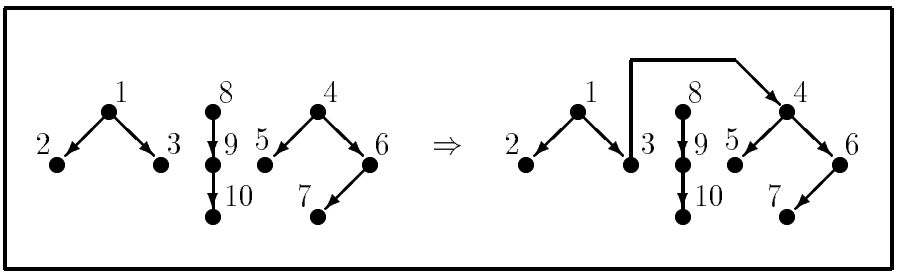
- Labeled Forests bei denen jeder Baum einen ausgezeichneten Wurzelknoten hat
- $\mathcal{F}_{n,k}$ ist die Menge aller Planted Forests mit n Knoten und k Bäumen
- $\mathcal{F}_{n,1}$ ist die Menge aller Planted Trees mit n Knoten
- $|\mathcal{F}_{n,1}| = nt_n$
- Ein Planted Forest kann als gerichteter Graph dargestellt werden
- Planted Forest $F_{n,i}$ enthält Planted Forest $F_{n,j} \leftrightarrow$ Alle Kanten von $F_{n,j}$ sind auch in $F_{n,i}$ vorhanden



Der linke Planted Forest enthält den rechten

Verfeinerungssequenzen

- Folgen $F_1, F_2, \ldots, F_k$ von Planted Forests für die gilt: $F_i \in \mathfrak{F}_{n,i}$ und F_i enthält F_{i+1}
- $N(F_k)$ ist die Anzahl aller Planted Trees die F_k enthalten
- $N^*(F_k)$ ist die Anzahl aller Verfeinerungssequenzen die mit F_k enden
- $N^*(F_k)$ kann auf zwei Weisen ermittelt werden
  - Start bei F_1
    $\rightarrow \quad N^*(F_k) = N(F_k)(k-1)!$
  - Start bei F_k
    $\rightarrow \quad N^*(F_k) = n^{k-1}(k-1)!$



Einfügen einer Kante führt von F_3 zu F_2

Beweis von Cayleys Formel

- $N^*(F_k) = N(F_k)(k-1)!$
- $N^*(F_k) = n^{k-1}(k-1)!$
- $N(F_k) = n^{k-1}$
- $N(F_n) = n^{n-1}$
- $N(F_n) = |\mathcal{F}_{n,1}| = nt_n$
- $t_n = n^{n-2}$