Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 1994/95
Semestralklausur
2. März 1995

Algorithmen und Datenstrukturen – Effiziente Algorithmen I

Semestralklausur

Bearbeitungszeit für die 8 Aufgaben der Klausur: 2 Stunden 15 Minuten. Verwenden Sie nicht die Farben Rot und Grün (reserviert für Korrektur)!

Aufgabe 1 [5 Punkte]

Sei n eine beliebige, aber fest gewählte Zahl ≥ 1. Beschreiben Sie eine Datenstruktur, die eine Untermenge S der Zahlen $\{1, 2, ..., n\}$ darstellen kann und die die folgenden Operationen zur Verfügung stellt:

1. Insert: eine Zahl aus $\{1, 2, ..., n\}$ wird in S eingefügt.
2. Delete_Any: wählt eine beliebige Zahl in S aus und löscht sie.
3. Member: es wird geprüft, ob eine angegebene Zahl in S enthalten ist.

Die Datenstruktur soll so beschaffen sein, daß alle drei beschriebenen Operationen in konstanter Zeit ablaufen, d.h. unabhängig von n.

Aufgabe 2 [3 Punkte]

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s \in V$ ein fest gewählter Startknoten und $c : E \to \mathbb{R}^+$ eine nicht-negative Gewichtsfunktion. Ein *kanten-kürzester Weg* von s nach $v \in V$ ist ein gerichteter Pfad, der unter allen Pfaden von s nach v mit minimaler Kantenanzahl die kürzeste Länge gemäß der Gewichtsfunktion c hat. Geben Sie an, wie Dijkstras Algorithmus für das „single-source" Kürzeste-Wege-Problem modifiziert werden muß, um einen Algorithmus zu erhalten, der für alle $v \in V$ die Länge eines kanten-kürzesten Weges von s nach v berechnet.

Aufgabe 3 [5 Punkte]

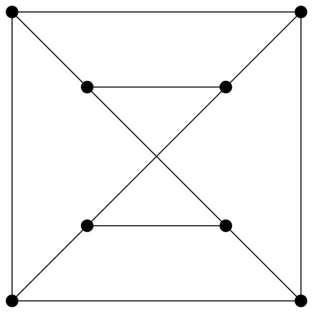
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $V = \{1, 2, ..., n\}$. Der Graph werde in Form von Adjazenzlisten dargestellt, d.h. zu jedem Knoten $v \in V$ ist eine Liste der zu v adjazenten Knoten gegeben. Beschreiben sie detailliert, wie die Adjazenzlisten des Graphen in Zeit $O(|V| + |E|)$ aufsteigend sortiert werden können.

Aufgabe 4 [3 Punkte]

In der Vorlesung wurde die Euler-Formel für planare, zusammenhängende Graphen besprochen. Wie lautet die Verallgemeinerung der Formel für planare Graphen mit $c > 1$ Zusammenhangskomponenten?

Aufgabe 5 [5 Punkte]

Entscheiden Sie, ob der folgende Graph planar ist, und begründen Sie Ihre Antwort.



Aufgabe 6 [6 Punkte]

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt zweifach (Knoten-) zusammenhängend, wenn er keinen Artikulationsknoten enthält. Zeigen Sie, daß G genau dann zweifach zusammenhängend ist, wenn es für beliebige Knoten $a, b, c \in V$ einen einfachen Pfad von a nach b gibt, der über c führt.

Aufgabe 7 [7 Punkte]

Ein einfacher, ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt k-färbbar, wenn es eine Abbildung $\chi : V \to \{1, ..., k\}$ gibt, sodaß $\chi(u) \neq \chi(v)$ für alle Kanten $\{u, v\} \in E$. Geben Sie einen Algorithmus an, der in linearer Zeit für einen planaren Graphen eine 6-Färbung berechnet (Ihr Algorithmus kann davon ausgehen, daß der Eingabegraph immer planar ist).

Aufgabe 8 [6 Punkte]

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$. Schreiben Sie, unter Zuhilfenahme von LEDA-Datentypen, eine C++ Funktion

```
bool is_bipartite(const ugraph &G),
```

die in Zeit $O(|V| + |E|)$ entscheidet, ob G 2-färbbar ist, oder nicht. Hinweis: 2-färbbar, d.h. bipartit, ist ein Graph genau dann, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.