Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 1994/95
Übungsblatt 7
12. Jan. 1995

Algorithmen und Datenstrukturen – Effiziente Algorithmen I

(Hausaufgaben-Abgabetermin: 12. Januar 1995, 10:00Uhr)

Aufgabe 1

Gegeben sei eine n-elementige Menge M. Beweisen Sie möglichst enge Schranken für die Anzahl der Vergleiche, die man benötigt, um das zweitkleinste Element von M zu bestimmen.

Aufgabe 2

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter zusammenhängender Graph, $c : E \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion. Zeigen Sie: Ist $e \in E$ einzige Kante minimalen Gewichts in einem Schnitt, so ist e in jedem minimalen Spannbaum von G enthalten. Wie heißt der dazu duale Satz?

Aufgabe 3

Sei G ein Graph mit $n+1$ Knoten $v_0, ..., v_n$ und m Kanten $e_1, ..., e_m$. Die $m \times (n+1)$-Matrix A sei definiert durch

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{, wenn } e_i = \{v_j, v_k\} \text{ für ein } k > j \\ -1 & \text{, wenn } e_i = \{v_j, v_k\} \text{ für ein } k < j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei A_0 die Matrix A ohne die Spalte für $j = 0$.

a) Zeige, daß für $m = n$ die Determinante von A_0 ± 1 ist, falls G ein Baum ist, und sonst 0.

b) Zeige, daß im allgemeinen die Determinante von $A_0^T A_0$ gleich der Anzahl der Spannbäume von G ist.

Sei $w(e_i)$ das Gewicht der Kante e_i. Die $m \times (n+1)$-Matrix B sei definiert durch

$$b_{ij} = \begin{cases} +x^{w(e_i)} & \text{, wenn } e_i = \{v_j, v_k\} \text{ für ein } k > j \\ -x^{w(e_i)} & \text{, wenn } e_i = \{v_j, v_k\} \text{ für ein } k < j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei B_0 die Matrix ohne die Spalte für $j = 0$.

c) Sei $p(x)$ die Determinante von $B_0^T A_0$. Zeige, daß $p(x)$ die Erzeugendenfunktion der Gewichte der Spannbäume von G ist, d.h., wenn p_k der Koeffizient von x^k in $p(x)$ ist, dann hat G p_k Spannbäume mit Gewicht k.

Hinweis: Hilfreich ist die folgende Zerlegung der Determinante:
Sei A eine $m \times n$- und B eine $n \times m$-Matrix. Dann ist

$$det(AB) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leq n} det(A_{j_1 j_2 \ldots j_m}) det(B_{j_1 j_2 \ldots j_m}),$$

wobei $A_{j_1 \ldots j_m}$ die $m \times m$-Matrix aus den Spalten $j_1, \ldots, j_m$ und $B_{j_1 \ldots j_m}$ die $m \times m$-Matrix aus den Spalten $j_1, \ldots, j_m$ bezeichnet.

Aufgabe 4

Implementieren Sie den in der Vorlesung angegebenen Minimalen-Spannbaum-Algorithmus, der Fibonacci-Heaps verwendet (2. Variante). Verwenden Sie dazu die Fibonacci-Heap-Datenstruktur in LEDA.

Die besten Wünsche für die Feiertage und Alles Gute für's Neue Jahr!