Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 1994/95
Übungsblatt 9
26. Jan. 1995

Algorithmen und Datenstrukturen – Effiziente Algorithmen I

(Hausaufgaben-Abgabetermin: 26. Januar 1995, 10:00Uhr)

Aufgabe 1

Wir wollen das Single-Pair-Shortest-Path-Problem mit Dijkstras Algorithmus auf Graphen mit n Knoten und m Kanten lösen, wobei die Kantenlängen ganze Zahlen aus $\{1, ..., C\}$ sind. Als Datenstruktur sollen *one-level Radix-Heaps* verwendet werden. Ein one-level Radix-Heap besteht aus $B = \lceil \log_2(C+1) \rceil + 2$ Buckets, die von 1 bis B durchnumeriert sind. Jedem Bucket i sind zwei Größen $size(i)$ und $range(i)$ zugeordnet. Dabei ist $size(1) = 1$, $size(i) = 2^{i-2}$ für $2 \leq i \leq B-1$ und $size(B) = nC+1$, und $range(i) = [u(i-1)+1 ... u(i)]$, wobei $u(i)$ eine nicht abnehmende, von der Stufe des Algorithmus abhängige Funktion ist. Zu Beginn des Algorithmus ist $u(0) = 1$, $u(i) = 2^{i-1} - 1$ für $1 \leq i \leq B-1$ und $u(B) = nC+1$. Somit ist $|range(i)| \leq size(i)$. Diese Ungleichung wird während des ganzen Algorithmus erfüllt. Zunächst kommt der Anfangsknoten s des Pfades in Bucket 1. Knoten v kommt in Bucket i, wenn $d(s,v) \in range(i)$.
Beschreiben Sie eine Implementierung der Heap-Operationen Insert, DecreaseKey und DeleteMin, so daß Dijkstras Algorithmus unter Verwendung von one-level Radix-Heaps Laufzeit $O(m + n \log C)$ hat.
Hinweise: Für einen einzelnen Knoten kosten Einfügen und *alle* Decrease-Operationen Zeit $O(\log C)$ plus $O(1)$ pro Decrease. Verteilen Sie die Gesamtkosten für alle DeleteMin-Operationen geeignet auf jedes einzelne DeleteMin und auf die Knoten.

Aufgabe 2

Geben Sie eine untere und obere Schranke für die Anzahl der Operationen an, die man braucht, um die transitive Hülle eines Graphen nach der Einfügung einer weiteren Kante neu zu berechnen.

Aufgabe 3

Sei $G = (V, E)$ ein azyklischer Digraph. $G' = (V, E')$ mit $E' \subseteq E$ heißt *transitive Reduktion* von G, falls G und G' die gleiche transitive Hülle haben und unter dieser Bedingung E' bezüglich $\subseteq$ minimal ist. Zeigen Sie, daß G' eindeutig bestimmt ist und geben Sie einen Algorithmus an, der G' in Zeit $O(|V| \cdot |E'|)$ berechnet.

Aufgabe 4

Implementieren Sie den trivialen $O(n^3)$-Algorithmus und den in der Vorlesung besprochenen 4-Russen-Algorithmus für Boolesche Matrixmultiplikation und vergleichen Sie den Zeitbedarf auf zufällig erzeugten Matrizenpaaren mit n zwischen 100 und 1000.