Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Klaus Jansen

SS 1995
Übungsblatt 8
6. Juli 1995

Parallele Algorithmen II

Aufgabe 1

Sei A die folgende untere Dreiecksmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Definiere die Matrizen E_i $(1 \leq i < n)$ wie folgt:

$$E_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & a_{i+1,i} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & a_{n,i} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeige, daß $A = E_1 E_2 \cdots E_{n-1}$.
b) Beschreibe die Inversen der Matrizen E_i.
c) Gib einen Algorithmus an, der in Zeit $O(\log^2 n)$ die Inverse von A berechnet. Wieviele Operationen werden benötigt?

Aufgabe 2

Wir wollen einen anderen Algorithmus für die diskrete Fourier-Transformation entwickeln. Sei wie üblich ω eine primitive n-te Einheitswurzel (also z.B. $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$) und W_n die $n \times n$-Matrix mit den Einträgen $w_{ij} := \omega^{ij}$ $(0 \leq i, j < n)$. Wir wollen ferner davon ausgehen, daß n eine Zweierpotenz ist. Ziel ist wieder, zu einem gegebenen Vektor x die Fouriertransformierte $y = W_n x$ zu berechnen.

a) Zeige, daß für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$y_k = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega^{2jk} x_{2j} + \omega^k \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega^{2jk} x_{2j+1}.$$

b) Leite einen Algorithmus ab, der y in Zeit $O(\log n)$ mit $O(n \log n)$ Operationen berechnet.
c) Zeichne den Datenflußgraghen zu diesem Algorithmus für $n = 8$ und vergleiche ihn mit dem Datenflußgraphen zu dem Algorithmus aus der Vorlesung.
d) Interpretiere den entwickelten Algorithmus als das Auswerten eines (welches?) Polynomes an den n-ten Einheitswurzeln.