Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Klaus Jansen

WS 1995/96
Übungsblatt 7
16. Jan. 1996

Automaten und formale Sprachen I

(Hausaufgaben-Abgabetermin: 16. Januar 1996, 10:00 Uhr)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die *k–adische Darstellung* ist wie folgt definiert:

$k = 1$: $\Sigma = \{a\}$; n dargestellt durch $(n)_1 = a^n$

$k > 1$: $\Sigma = \{0, \ldots, k-1\}$; n dargestellt durch

$$(n)_k = \begin{cases} c_r \ldots c_0 & \text{für } n = \sum_{i=0}^{r} c_i k^i,\ 0 \leq c_i < k,\ c_r \neq 0,\ n > 0 \\ 0 & \text{für } n = 0. \end{cases}$$

Beispiel: $(3)_1 = aaa$, $(3)_2 = 11$.

Für eine Menge $M \subset \mathbb{N}$ definiert man:

M heißt *k–regulär* $:\Longleftrightarrow$ $\{(n)_k \mid n \in M\}$ ist reguläre Sprache.

M heißt *schließlich periodisch* $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, n_0 \geq 0 \;\; \exists\, p > 0 \;\; \forall\, n \geq n_0 \;\; (n \in M \Longleftrightarrow n + p \in M)$.

M heißt *arithmetische Progression* $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, n_0 \geq 0\ \exists\, p \geq 0 \quad M = \{n_0 + i \cdot p \mid i \geq 0\}$.

Aufgabe 1

Man zeige: Für $M \subset \mathbb{N}$ sind äquivalent:

(a) M ist 1–regulär

(b) M ist schließlich periodisch

(c) M ist endliche Vereinigung arithmetischer Progressionen.

Aufgabe 2

Man zeige:

(a) Sei $M \subset \mathbb{N}$, $M = \{m_0, m_1, \ldots\}$, $m_i < m_{i+1}$. Ist die Differenzenfolge $m_{i+1} - m_i$ unbeschränkt, dann ist M nicht 1–regulär.

(b) Die Menge der Zweierpotenzen ist nicht 1–regulär, jedoch 2–regulär.

Aufgabe 3

Man zeige: Ist $M \subset \mathbb{N}$ 1–regulär, so ist M auch k–regulär für jedes $k > 1$.

Hinweis: Betrachte $\Sigma = \{0, \ldots, k-1\}$, $L = \{(n)_k \mid n \in M\}$ und zeige, daß L unter Verwendung der Äquivalenzrelation $\simeq_L$ regulär ist. Dann nutze man aus, daß M eine arithmetische Progression ist.