Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

SS 1996
Übungsblatt 11
24. Juli 1996

Kombinatorische Algorithmen

Abgabetermin: 31. Juli 1996, 10:15

Aufgabe 1

Entwerfen Sie einen polynomialen, randomisierten Approximationsalgorithmus für MAX-SAT, der (im Erwartungswert) mindestens 3/4 aller maximal möglichen Klauseln erfüllt.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, daß sich jede Instanz von MAX2SAT als ein ganzzahliges quadratisches Programm der Form

$$(Q) \qquad \max \sum_{0 \le i < j \le n} \Big[a_{ij}(1 - y_i y_j) + b_{ij}(1 + y_i y_j) \Big]$$
$$s.t. \quad y_i \in \{-1, +1\} \qquad \text{für alle } i = 0, \ldots, n$$

schreiben läßt.

b) Eine Relaxierung analog zu der in der Vorlesung behandelten für MAXCUT führt zu dem semidefiniten Programm

$$(Q') \qquad \max \sum_{0 \le i < j \le n} \Big[a_{ij}(1 - v_i^T v_j) + b_{ij}(1 + v_i^T v_j) \Big]$$
$$s.t. \quad v_i \in S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^T x = \|x\|_2^2 = 1 \} \qquad \text{für alle } i = 0, \ldots, n,$$

das sich ebenfalls in polynomialer Zeit lösen läßt. Entwickeln Sie daraus einen polynomialen, randomisierten Approximationsalgorithmus für MAX2SAT, der (im Erwartungswert) mindestens

$$\alpha = \min_{0 \le \varphi \le \pi} \frac{2\varphi}{\pi(1 - \cos\varphi)} > 0.87856$$

aller maximal möglichen Klauseln erfüllt.

Aufgabe 3

Zu einer Instanz von MAXSAT mit n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und m Klauseln $C_1, \ldots, C_m$ betrachten wir das folgende semidefinite Programm:

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \max \sum_{j=1}^{m} z_j & \\
\text{s.t.} & \frac{1}{2} \sum_{i: x_i \in C_j} (1 + v_0^T v_i) + \frac{1}{2} \sum_{i: \bar{x}_i \in C_j} (1 - v_0^T v_i) \geq z_j & \text{für alle } j = 1, \ldots, m \\
& u(C_j) \geq z_j & \text{für alle 2-elementigen Klauseln } C_j \\
& v_i \in S^{n-1} & \text{für alle } i = 0, \ldots, n \\
& 0 \leq z_j \leq 1 & \text{für alle } j = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
u(x_i \vee x_j) &= \frac{1}{4}(1 + v_0^T v_i) + \frac{1}{4}(1 + v_0^T v_j) + \frac{1}{4}(1 - v_i^T v_j) \\
u(\bar{x}_i \vee x_j) &= \frac{1}{4}(1 - v_0^T v_i) + \frac{1}{4}(1 + v_0^T v_j) + \frac{1}{4}(1 + v_i^T v_j)
\end{aligned}
$$

und analog für $u(x_i \vee \bar{x}_j)$ und $u(\bar{x}_i \vee \bar{x}_j)$.

Es sei $v_0^*, \ldots, v_n^*, z_1^*, \ldots, z_m^*$ eine optimale Lösung für (P). Betrachten Sie die drei Algorithmen

(i) x_i wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf `wahr` gesetzt (unabhängig voneinander)

(ii) x_i wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}(1 + (v_0^*)^T v_i^*)$ auf `wahr` gesetzt (unabhängig voneinander)

(iii) Wähle zufällig und gleichverteilt einen Vektor $r \in S^{n-1}$ und setzte x_i auf `wahr` genau dann, wenn $\operatorname{sign}(r^T v_i^*) = \operatorname{sign}(r^T v_0^*)$.

Zeigen Sie wie man durch geschickte Kombination der drei Algorithmen einen polynomialen, randomisierten Approximationsalgorithmus für MAXSAT erhält, der (im Erwartungswert) mindestens 0.7554 aller maximal möglichen Klauseln erfüllt.