Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

SS 1996
Übungsblatt 2
15. Mai. 1996

Kombinatorische Algorithmen

Abgabetermin: 22. Mai 1996, 10:15

Aufgabe 1

3-Colorability ($\Delta \le k$) bezeichne das folgende Entscheidungsproblem: "*Gegeben ein Graph $G=(V,E)$ mit Maximalgrad $\Delta(G) \le k$, ist G 3-färbbar?*"

a) Zeigen Sie: 3-Colorability ($\Delta \le 3$) ist polynomiell entscheidbar.

b) Zeigen Sie: 3-Colorability ($\Delta \le 4$) ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Aufgabe 2

Zeigen Sie:

a) Sei $0<\varepsilon<1$ beliebig, aber fest. Dann ist 3-Colorability eingeschränkt auf die Klasse aller Graphen $G=(V,E)$ mit Minimalgrad $\delta(G) \ge |V|^{1-\varepsilon}$ $\mathcal{NP}$-vollständig.

b) Sei $k \ge 4$ beliebig, aber fest. Dann ist k-Colorability eingeschränkt auf die Klasse aller Graphen $G=(V,E)$ mit Minimalgrad $\delta(G) \ge (1-\frac{1}{k-2}) \cdot |V|$ $\mathcal{NP}$-vollständig.

Aufgabe 3

Zeigen Sie: für alle $k \ge 4$ und $\varepsilon > 0$ ist k-Colorability eingeschränkt auf die Klasse aller Graphen $G=(V,E)$ mit Minimalgrad $\delta(G) \ge (1-\frac{1}{k-2}+\varepsilon) \cdot |V|$ polynomiell entscheidbar.

Hinweis: Verfahren Sie analog wie im Beweis von Satz 1.10, wobei jedoch innerhalb des Algorithmus statt einem Knoten v eine $(k-2)$-Clique gewählt wird. Um zu zeigen, daß die Nachbarschaft jedes Knoten genügend viele $(k-2)$-Cliquen enthält, verwenden Sie folgendes Resultat: Ist $G=(V,E)$ ein Graph auf n Knoten und $\ge \frac{1}{2}(1-\frac{1}{k-1}+\varepsilon)n^2$ vielen Kanten, so enthält G mindestens αn^k viele k-Cliquen, wobei $\alpha=\alpha(\varepsilon,k)$ eine Konstante ist, die nur von ε und k abhängt.