Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

SS 1996
Übungsblatt 8
3. Juli 1996

Kombinatorische Algorithmen

Abgabetermin: 10. Juli 1996, 10:15

Aufgabe 1

Modifizieren Sie den Algorithmus aus der Vorlesung für das KNAPSACK-Problem so, daß er

a) nicht nur den maximalen Profit ausgibt, sondern auch eine Indexmenge $I \subseteq [1{:}n]$, die diesen Profit erreicht;

b) Zeitkomplexität $O(nB)$ anstatt von $O(n^2 p_{\max})$ hat.

Aufgabe 2

Im folgenden sei $(B, n, p_1, \ldots, p_n, w_1, \ldots, w_n)$ eine Eingabe eines KNAPSACK-Problems, wobei n die Anzahl der verschiedenen Objekte ist, p_i der Profit des i-ten Objekts, w_i das Gewicht des i-ten Objekts und B die maximal Tragfähigkeit des Rucksacks ist. Wir bezeichnen mit P_{opt} den maximal möglichen Profit eines KNAPSACK-Problems und mit P_{Greedy} den durch den folgenden GREEDY-Algorithmus erzielten Profit:

procedure Greedy_Knapsack;
  Sortiere die Objekte nach ihrer 'Effizienz', d.h. $\frac{p_1}{w_1} \geq \cdots \geq \frac{p_n}{w_n}$;
  $X := \emptyset$;
  Sei $j_0 \in [1{:}n]$ so gewählt, daß $p_{j_0} = \max\{p_j : j \in [1{:}n] \wedge w_j \leq B\}$;
  for $i := 1$ **to** n **do**
    if $w_i + \sum_{j \in X} w_j \leq B$ **then** $X := X \cup \{i\}$; **endif**;
  enddo;
  if $\sum_{j \in X} p_j > p_{j_0}$ **then return** $\sum_{j \in X} p_j$; **else return** p_{j_0}; **endif**;
end.

a) Zeigen Sie: $P_{\text{Greedy}} \geq \frac{1}{2} P_{\text{opt}}$. Zeigen Sie hierfür zunächst folgendes: sind die Objekte nach ihrer 'Effizienz' sortiert, d.h. daß $\frac{p_1}{w_1} \geq \cdots \geq \frac{p_n}{w_n}$, so gilt für alle $k \in [1{:}n]$:

$$P_{\text{opt}} \leq \sum_{j=1}^{k} p_j + \frac{p_{k+1}}{w_{k+1}} \left(B - \sum_{j=1}^{k} w_j \right).$$

Folgern Sie daraus die Behauptung durch geeignete Wahl von k.

b) Geben Sie für alle $\varepsilon > 0$ ein Beispiel an, für das $P_{\text{Greedy}} \leq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) P_{\text{opt}}$ gilt.