Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

WS 1996/7
Übungsblatt 1
7. November 1996

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen

Abgabe am 13. November 1996 bis 8:00 Uhr im Briefkasten

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen gelten (jeweils mit Begründung)?
a) $n^2 \log n = \mathcal{O}(n^3)$
b) $11 \log n = \Omega(n)$
c) $n^2 + 10^{100} n = \mathcal{O}(n^2)$
d) $n^2 + 2n = \frac{1}{2} n^2 + o(n^2)$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Laufzeit (in Abhängigkeit von n) des Programms

$x = 2;$
for $(i = 1; i < n; i++)$
$\{x = 2 * x;\}$

unter Verwendung des
a) Einheitskostenmaßes
b) logarithmischen Kostenmaßes.
c) Was ändert sich, wenn die Anweisung $x = 2 * x$ durch $x = 2 + x$ ersetzt wird?

Aufgabe 3

Zeigen Sie:

a) Erfüllt eine Funktion $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Rekursionsungleichung

$$T(n) \le \begin{cases} 2T(\lceil \frac{n}{3} \rceil) + 4n & \text{falls } n \ge 4 \\ 5 & \text{falls } n \le 3, \end{cases}$$

so gilt $T(n) = \mathcal{O}(n)$.
Hinweis: Zeigen Sie durch Induktion, daß $\forall n \in \mathbb{N} : T(n) \le 15n$

b) Erfüllt eine Funktion $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Rekursionsungleichung

$$T(n) \le \begin{cases} 3T(\lceil \frac{n}{3} \rceil) + 4n & \text{falls } n \ge 4 \\ 5 & \text{falls } n \le 3, \end{cases}$$

so gilt $T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$.

c) Erfüllt eine Funktion $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Rekursionsgleichung

$$T(n) = \begin{cases} 4T(\lceil \frac{n}{3} \rceil) + 4n & \text{falls } n \geq 4 \\ 5 & \text{falls } n \leq 3, \end{cases}$$

so gilt $T(n) = \Omega(n^{1,25})$.

Aufgabe 4

$A[0..n-1]$ sei ein Array mit n verschiedenen Zahlen. Ein Paar (i, j) nennen wir *Inversion*, falls $i < j$ und $A[i] > A[j]$.

Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der für ein Array der Länge n die Anzahl Inversionen in (worst case) Laufzeit $\mathcal{O}(n \log n)$ bestimmt.

Hinweis: Modifizieren Sie MergeSort geeignet.