Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

WS 1996/7
Übungsblatt 10
22. Januar 1996

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen

Abgabe am 29. Januar 1996 bis 8:00 Uhr im Briefkasten

Aufgabe 37

Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der für (ungewichtete) Graphen $G = (V, E)$ und einen gegebenen Knoten $s \in V$ in Zeit $\mathcal{O}(n + m)$ für alle Knoten $v \in V$ die Länge eines kürzesten s-v-Pfades berechnet.

Aufgabe 38

Ein Graph heißt *bipartit* genau dann, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

a) Zeigen Sie: Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann bipartit, wenn sich die Knotenmenge so in zwei Teile $V = U_0 \cup U_1$ zerlegen läßt, daß $\binom{U_i}{2} \cap E = \emptyset$ (für $i = 0$ und $i = 1$).

b) Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der bipartite Graphen in Zeit $\mathcal{O}(n+m)$ erkennt.

c) Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der in Zeit $\mathcal{O}(n + m)$ erkennt, ob G das Komplement eines bipartiten Graphen ist.
ACHTUNG: Sie können nicht einfach den Algorithmus aus Teil b) auf das Komplement anwenden! (Warum nicht?)

Aufgabe 39

Sei $G = (V, E; \ell)$ ein zusammenhängender gewichteter Graph mit Gewichtsfunktion $\ell : E \to \mathbb{R}^+$. Weiter sei $s \in V$ ein beliebiger Knoten. Ein *kürzester-Pfad-Baum mit Wurzel* s ist ein spannender Baum T mit der Eigenschaft, daß für alle $v \in V$ der eindeutig bestimmte s-v-Pfad in T ein *kürzester* s-v-Pfad in G ist. Zeigen Sie:

a) Solch ein kürzester-Pfad-Baum mit Wurzel s existiert immer.

b) Ist für alle Knoten $v \in V$ die Länge eines kürzesten s-v-Pfades gegeben, kann man einen kürzesten-Pfad-Baum mit Wurzel s in Zeit $\mathcal{O}(n + m)$ konstruieren.

Aufgabe 40

Implementieren Sie den in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus von Dijkstra für das Single-Source-Shortest-Path-Problem. Dies entspricht der dritten Aufgabe des Programmierwettbewerbes, mit dem Unterschied, daß nun die Laufzeit des Referenzprogrammes nicht geschlagen werden braucht, dafür aber vorgeschrieben ist, welcher Algorithmus verwendet werden muß. Genauere Spezifikationen finden Sie im WWW unter der URL
`http://wwwmayr.informatik.tu-muenchen.de/lehrva/1996WS/ea-ueb/ea-sp.html`.
Das Referenzprogramm, einen Rahmen für die Ein- und Ausgabe (den Sie nicht unbedingt verwenden müssen) sowie eine Test-Eingabe finden Sie auf den hphalle-Rechnern unter
`~kuehnle/programmierwettbewerb/shortestpath/`.