Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

WS 1996/7
Übungsblatt 12
5. Februar 1996

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen

Abgabe am 12. Februar 1996 bis 8:00 Uhr im Briefkasten

Aufgabe 45

In Aufgabe 42 war nach einer effizienten Methode, in einem azyklischen Digraphen $D = (V, A)$ mit nichtnegativen Kantengewichten einen längsten s-t-Pfad zu finden, gefragt. Eine leichte Adaption des Algorithmus von Bellman/Ford führte zu einem Algorithmus mit Laufzeit $O(nm)$. Aber es geht auch noch schneller, nämlich in Zeit $O(n + m)$. Wie?

Hinweis: Man kann A als partielle Ordnung auffassen, die Knoten nach dieser Ordnung effizient sortieren (in der Literatur wird dies häufig als topologisches Sortieren bezeichnet) und sie dann in dieser Reihenfolge abarbeiten.

Aufgabe 46

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Kantenmenge $F \subseteq E$ heißt *Schnitt*, falls es eine Knotenmenge $W \subseteq V$ gibt, so daß $F = \{e \in E \mid |e \cap W| = 1\}$.

Für einen Graphen $G = (V, E)$ mit Längenfunktion $\ell : E \to \mathbb{R}$ werden Kanten sukzessive mit den Farben rot und blau nach den folgenden beiden Regeln gefärbt:

Blaue Regel: Wähle einen Schnitt F, der keine blaue Kante enthält. Wähle eine ungefärbte Kante $e_0 \in F$ mit $\ell(e_0) = \min\{\ell(e) \mid e \in F,\ e \text{ ungefärbt}\}$ und färbe e_0 blau.

Rote Regel: Wähle einen Kreis C, der keine rote Kante enthält. Wähle eine ungefärbte Kante $e_1 \in C$ mit $\ell(e_1) = \max\{\ell(e) \mid e \in C,\ e \text{ ungefärbt}\}$ und färbe e_1 rot.

Zeigen Sie: Startet man mit einem zusammenhängenden Graphen, in dem alle Kanten ungefärbt sind, und wendet die blaue und rote Regel (in beliebiger Reihenfolge) so lange an, bis keine der beiden Regeln mehr anwendbar ist, so bilden die dann blau gefärbten Kanten einen minimal spannenden Baum.

Hinweis: Versuchen Sie, die Induktion aus dem Korrektheitsbeweis des Algorithmus von Prim anzupassen.

Aufgabe 47

Zeigen Sie, daß sich sowohl der Algorithmus von Kruskal als auch der Algorithmus von Prim als Spezialfall der Rot-Blau-Regel aus Aufgabe 46 ergeben.

Bemerkung: Zusammen mit dem Ergebnis von Aufgabe 46 ergibt sich damit auch der in der Vorlesung ausgelassene Korrektheitsbeweis des Algorithmus von Kruskal.

Aufgabe 48

Sei $D = (V, A)$ ein azyklischer Digraph. $D' = (V, A')$ mit $A' \subseteq A$ heißt *transitive Reduktion* von D, falls D und D' die gleiche transitive Hülle haben und unter dieser Bedingung A' bezüglich $\subseteq$ minimal ist.

a) Zeigen Sie, daß D' eindeutig bestimmt ist.
b) Geben Sie einen Algorithmus an, der D' in Zeit $\mathcal{O}(\alpha(n) \cdot \log n)$ berechnet, wobei $\alpha(n)$ die Zeit, die man zum booleschen Multiplizieren zweier boolescher $n \times n$-Matrizen benötigt, sei. (Zur Erinnerung: In der Vorlesung wurde mit Hilfe von Strassens Methode gezeigt, daß $\alpha(n) = \mathcal{O}(n^{2{,}81})$.)

Klausuranmeldung

Die Semestralklausur findet voraussichtlich am Donnerstag, den 27. Februar, von 8.00 Uhr bis 10.00 Uhr im Hörsaal 0360 (gleicher Ort und fast gleiche Zeit wie sonst die Vorlesung) statt. Wenn Sie daran teilnehmen möchten, melden Sie sich bitte per e-mail bei `kuehnle@informatik.tu-muenchen.de` an, wobei folgende Informationen zu Ihrer Person enthalten sein müssen: vollständiger Name, Geburtsdatum, Matrikelnummer und Hauptfach (falls nicht Informatik).
Voraussetzung zur Teilnahme an der Klausur ist außer einer Anmeldung mit vollständigen Daten die aktive Teilnahme am Übungsbetrieb, die durch $\geq$40% der erreichbaren Hausaufgabenpunkte nachgewiesen wird.
Als Hilfsmittel in der Klausur ist außer Stiften (bitte nicht rot oder grün) nur **ein** beliebig (beidseitig) beschriebenes DIN A4-Blatt erlaubt.