Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

WS 1996/7
Übungsblatt 5
4. Dezember 1996

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen

Abgabe am 11. Dezember 1996 bis 8:00 Uhr im Briefkasten

Aufgabe 17

a) Die Fibonacci-Zahlen seien wie folgt definiert:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 0)$$

Leiten Sie eine explizite (also nicht rekursive) Formel für die Fibonacci-Zahlen her.
Hinweis: Das Ergebnis ist $F_i = c_1 {z_1}^i + c_2 {z_2}^i$ für geeignete reelle Konstanten c_1, c_2, z_1, z_2.
b) Begründen Sie mit Ihrem Ergebnis aus Teil (a), daß die Fibonacci-Zahlen asymptotisch exponentiell wachsen.

Aufgabe 18

a) Zeigen Sie für die oben definierten Fibonacci-Zahlen:

$$\forall n \geq 0: \quad F_{n+1} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} F_i.$$

b) Zeigen Sie: Ist x ein beliebiger Knoten in einem Fibonacci-Heap und n der Rang von x, dann enthält der Unterbaum mit Wurzel x mindestens F_{n+2} Knoten. (Dies ist, zusammen mit dem Ergebnis aus der vorangegangenen Aufgabe, ein alternativer Beweis von Lemma 2.7 aus der Vorlesung.)

Aufgabe 19

Verallgemeinern Sie die Idee der 2-Level-Buckets auf k-Level-Buckets. Die amortisierte Laufzeit von Insert und DecreaseKey soll wieder $\mathcal{O}(1)$ sein, die von ExtractMin nur noch $\mathcal{O}(C^{\frac{1}{k}})$, wobei C die obere Schranke für die Differenz zwischen größtem und kleinstem Schlüssel sein soll.

Aufgabe 20

Implementieren Sie 2-Level-Buckets. Ergänzen Sie hiebei die Prozeduren aus der Vorlesung um geeignete Fehlerabfragen, so daß die Prozeduren auch bei Verletzung der Voraussetzungen über die Schlüssel nie eine falsche Antwort liefern. Das Programm soll dieselben Eingaben bearbeiten können, wie es in der Aufgabe über die Fibonacci-Heaps gefordert war. (Abgabe per e-mail)