Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

WS 1996/7
Übungsblatt 7
18. Dezember 1996

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen

Abgabe am 8. Januar 1996 bis 8:00 Uhr im Briefkasten

Aufgabe 25

Eine Woche vor Heilig Abend beginnt das Christkind mit dem Packen des Schlittens. Im himmlischen Geschenkelager befinden sich $n = 10^6$ verschiedene Geschenke im Wert von $p_1, \ldots, p_n$ Pfennigen, wobei $\min_{1 \leq i \leq n} p_i = 13$ Pf und $\max_{1 \leq i \leq n} p_i = 999,99$ DM. Für jedes der Geschenke ist auch das Gewicht w_i (in Gramm) bekannt. Das Christkind möchte die irdischen Kinder möglichst reich beschenken. Allerdings bricht der himmlische Schlitten zusammen, wenn er mit mehr als 100,2 kg beladen wird.

Das Christkind erinnert sich dankbar an eine Vorlesung *Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen*, die es im Wintersemester 96/97 an der TU München gehört hat. Zwar ist der dort vorgestellte Algorithmus nicht sofort anwendbar, doch nach einigen Modifikationen finden die himmlischen Rechner in Minutenschnelle eine optimale Lösung. Sie auch?

Achtung: Himmlische Rechner sind zwar um einiges schneller als irdische Workstations, für $10^{12} \cdot 99\,999$ Operationen benötigen aber auch sie mehrere Tage! ($10^6 \cdot 100\,200$ Operationen bewältigen sie andererseits in Minutenschnelle.)

Aufgabe 26

Gegeben sei ein Rucksack-Problem mit n Objekten mit Profiten p_i und Gewichten w_i ($1 \leq i \leq n$) und mit einer Rucksack-Kapazität von B. Wir bezeichnen mit P_{opt} den maximal möglichen Profit und mit P_{greedy} den Profit, der durch den folgenden Greedy-Algorithmus erzielt wird:

> Sortiere die Objekte so, daß $\frac{p_1}{w_1} \geq \ldots \geq \frac{p_n}{w_n}$; setze $I := \emptyset$.
> **for** $i := 1$ **to** n **do**
>   **if** $w_i + \sum_{j \in I} w_j \leq B$ **then** $I := I \cup \{i\}$.
> **return** $\sum_{j \in I} p_j$.

a) Zeigen Sie, daß der Quotient $P_{\text{opt}}/P_{\text{greedy}}$ beliebig groß werden kann.
b) Zeigen Sie, daß $P_{\text{greedy}} \geq \frac{1}{2} P_{\text{opt}}$, wenn man die letzte Zeile im Algorithmus ersetzt durch

> Bestimme j_0 so, daß $p_{j_0} = \max\{p_j \mid 1 \leq j \leq n, w_j \leq B\}$.
> **if** $\sum_{j \in I} p_j > p_{j_0}$ **then return** $\sum_{j \in I} p_j$ **else return** p_{j_0}.

Hinweis: Zeigen Sie, daß für die bereits sortierten Objekte gilt:

$$\forall k : P_{\text{opt}} \leq \sum_{j=1}^{k} p_j + \frac{p_{k+1}}{w_{k+1}} \left(B - \sum_{j=1}^{k} w_j \right)$$

Aufgabe 27

Überlegen Sie sich eine Realisierung einer Union-Find-Datenstruktur, mit deren Hilfe der Schritt (2) im Algorithmus von Kruskal nur $\mathcal{O}(m + n \log n)$ Schritte benötigt.

Aufgabe 28

Lösen Sie die auf dem zusätzlichen Blatt abgedruckte Programmieraufgabe (Problem H: Jury Compromise) des diesjährigen ACM (Association for Computing Machinery) Collegiate Programming Contest. Ein Inputfile zum Üben liegt auf den hphalle-Rechnern unter `~kuehnle/effalg/a28/input1`. (Abgabe per e-mail)

Schöne Feiertage und viel Erfolg im neuen Jahr!