Grundversion des Simplexalgorithmus

Phase I (Initialisierung)

- Bestimme eine zulässige Basis B;
  Falls keine existiert: STOP

- Berechne Standardtableau zur Basis B:

$$T_0 := \begin{pmatrix} B^{-1}A & B^{-1}b \\ c^T - c_B^T B^{-1}A & -c_B^T B^{-1}b \end{pmatrix}$$

Phase II (Optimierung)

Notation: $T = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{b} \\ \bar{c} & -c_0 \end{pmatrix}$

- (Optimalitätsprüfung)
  Gilt $\bar{c} \geq 0 \quad \longrightarrow$ STOP: Lösung x mit $x_B = \bar{b}$ und $x_N = 0$ ist optimal;

- (Bestimmung einer Pivotspalte)
  Wähle einen (beliebigen) Index $s \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\bar{c}_s < 0$;
  [Auswahlstrategien bei mehreren Möglichkeiten besprechen wir später]

- (Prüfung auf Beschränktheit des Optimums)
  Gilt $\bar{A}_{\cdot\, s} \leq 0 \quad \longrightarrow$ STOP: Problem ist unbeschränkt

- (Bestimmung der Pivotzeile)
  Wähle einen (beliebigen) Index $r \in \{1, \ldots, m\}$ mit

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min\{\frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_{ts}} \mid t \in \{1, \ldots, m\} \text{ und } \bar{a}_{ts} > 0\};$$

  [Auswahlstrategien bei mehreren Möglichkeiten besprechen wir später]

- (Pivotoperation, Basistausch)
  Erzeuge durch elementare Zeilenumformungen in der s-ten Spalte des Tableaus den r-ten Einheitsvektor e_r;
  [Entspricht: Bringe x_s in die Basis]

Dualer Simplexalgorithmus

GEGEBEN: Simplex Tableau

$$T = \begin{pmatrix} \bar{A} = B^{-1}A & \bar{b} = B^{-1}b \\ \bar{c} = c^T - c_B^T B^{-1} A & -c_0 = -c_B^T B^{-1} b, \end{pmatrix}$$

wobei B dual zulässige Basis (d.h., $\bar{c} \geq 0$).

- (Optimalitätsprüfung)
  Gilt $\bar{b} \geq 0 \quad \longrightarrow \quad$ STOP: Lösung x mit $x_B = \bar{b}$ und $x_N = 0$ ist auch primal zulässig und daher optimal;

- (Bestimmung einer Pivotzeile)
  Wähle einen (beliebigen) Index $r \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\bar{b}_r < 0$;
  [verschiedene Auswahlstrategien ...]

- (Prüfung auf Beschränktheit des Optimums)
  Gilt $\bar{A}_{r\cdot} \geq 0 \quad \longrightarrow \quad$ STOP: duales Problem ist unbeschränkt und primales hat daher keine zulässige Lösung

- (Bestimmung der Pivotspalte)
  Wähle einen (beliebigen) Index $s \in \{1, \ldots, n\}$ mit
  $$\frac{\bar{c}_s}{\bar{a}_{rs}} = \max\{\frac{\bar{c}_t}{\bar{a}_{ts}} \mid t \in \{1, \ldots, n\} \text{ und } \bar{a}_{ts} < 0\};$$
  [verschiedene Auswahlstrategien ...]

- (Pivotoperation, Basistausch)
  bzgl $\bar{a}_{rs}$, wie im primalen Algorithmus

$$\begin{array}{lrrrcr}
\min & 3x_1 & +3x_2 & +6x_3 & & \\
 & x_1 & +2x_2 & 4x_3 & \leq & 14 \\
 & -2x_1 & -x_2 & -5x_3 & \leq & -25 \\
 & x_1 & & 2x_3 & \leq & 14 \\
 & & & x_i & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll|rrrrrr|r}
 & & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \\
T_0: & s_1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 14 \\
 & s_2 & -2 & -1 & \boxed{-5} & 0 & 1 & 0 & -25 \\
 & s_3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 14 \\
\hline
 & & 3 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll|rrrrrr|r}
T_1: & s_1 & \boxed{-\frac{3}{5}} & \frac{6}{5} & 0 & 1 & \frac{4}{5} & 0 & -6 \\
 & x_2 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 5 \\
 & s_3 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 1 & 4 \\
\hline
 & & \frac{3}{5} & \frac{9}{5} & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & -30
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll|rrrrrr|r}
T_2: & x_1 & 1 & -2 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 10 \\
 & x_3 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\
 & s_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & 2 \\
\hline
 & & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & -36
\end{array}$$

$\Longrightarrow x = (10, 0, 1)$ ist optimal!

Primal-duale Methode

GEGEBEN: zulässige Lösung y_0 für (D)

- Bestimme zugehörige eingeschränkte Probleme (RP) und (RD)
- Berechne optimale Lösung (x_0, z_0) von (RP)
- Falls $z_0 = 0 \quad \longrightarrow \quad$ STOP: x_0 und y_0 sind optimal
- Berechne optimale Lösung u_0 von (DP)
- Falls $u_0^T A \leq 0 \quad \longrightarrow \quad$ STOP: (P) ist unlösbar
- Bestimme neue dual zulässige Lösung:

$$y_0 \leftarrow y_0 + \epsilon_0 u_0,$$

wobei $\epsilon_0 := \min_j \{ \frac{c_j - y_0^T A_{\cdot j}}{u_0^T A_{\cdot j}} \mid u_0^T A_{\cdot j} > 0 \}$

Bipartites Matching

Formulierung als LP:

$$
\begin{array}{llllll}
(P) & \min & \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} & & & \\
& & \sum_j x_{ij} & = & 1 & \text{für alle } i \in A \\
& & \sum_i x_{ij} & = & 1 & \text{für alle } j \in B \\
& & x_{ij} & \geq & 0 & \text{für alle } i \in A, j \in B
\end{array}
$$

Zugehöriges duales Problem:

$$
\begin{array}{llllll}
(D) & \max & \sum_i y_i + \sum_j z_j & & & \\
& & y_i + z_j & \leq & c_{ij} & \text{für alle } i \in A, j \in B
\end{array}
$$

<u>Bem:</u>

$$
\begin{array}{llll}
\alpha_i & = & 0 & \text{für alle } i \in A \\
\beta_j & = & \min_i c_{ij} & \text{für alle } j \in B
\end{array}
$$

ist dual zulässig.

Wende primal-duale Methode an:

Startlösung: $\alpha_i = 0$ für alle $i \in A$,
$\beta_j = \min_i c_{ij}$ für alle $j \in B$

In jeder Iteration betrachten wir:

$$S = \{(i,j) \in A \times B \mid \alpha_i + \beta_j = c_{ij}\},$$

$$\begin{array}{llrcll}
(RP) & \min & \sum_i \xi_i + \sum_j \eta_j & & & \\
 & & \sum_j x_{ij} + \xi_i & = & 1 & \text{für alle } i \in A \\
 & & \sum_i x_{ij} + \eta_j & = & 1 & \text{für alle } j \in B \\
 & & x_{ij} & \geq & 0 & \text{für alle } (i,j) \in S \\
 & & x_{ij} & = & 0 & \text{für alle } (i,j) \notin S \\
 & & \xi_i, \eta_j & \geq & 0 & \text{für alle } i \in A, j \in B
\end{array}$$

$$\begin{array}{llrcll}
(RD) & \max & \sum_i y_i + \sum_j z_j & & & \\
 & & y_i + z_j & \leq & 0 & \text{für alle } (i,j) \in S \\
 & & y_i & \leq & 1 & \text{für alle } i \in A \\
 & & z_j & \leq & 1 & \text{für alle } j \in B
\end{array}$$

BEOBACHTUNG:

- (RP) entspricht einem Matching Problem in dem ungewichteten bipartiten Graphen $G' = (A \cup B, S)$.

VORGEHENSWEISE:

- Bestimme mit dem Algorithmus aus Kapitel 4.2 ein maximales Matching M in G' und damit auch eine optimale Lösung von (RP).

- Bestimme eine optimale Lösung für (RD) wie folgt: Setze

$$\begin{aligned} A_0 &:= \{i \in A \mid \text{ es gibt einen alternierenden Pfad, der in} \\ &\quad \text{ungematchten Knoten von } A \text{ beginnt und in } i \text{ endet}\}, \\ B_0 &:= \{j \in B \mid \text{ es gibt einen alternierenden Pfad, der in} \\ &\quad \text{ungematchten Knoten von } A \text{ beginnt und in } j \text{ endet}\} \end{aligned}$$

$$u_i = \begin{cases} +1 & i \in A_0 \\ -1 & i \in A \setminus A_0 \end{cases}, \quad v_j = \begin{cases} -1 & j \in B_0 \\ +1 & j \in B \setminus B_0. \end{cases}$$

Dann ist (u_i, v_j) zulässig für (RD) und wegen

$$\sum_i u_i + \sum_j v_j = |A| + |B| - 2|M|$$

sogar eine optimale Lösung für (RD).

- Bestimme neue (bessere) duale Lösung:

$$\alpha_i^{neu} = \begin{cases} \alpha_i + \epsilon_0 & i \in A_0 \\ \alpha_i - \epsilon_0 & i \in A \setminus A_0 \end{cases},$$

$$\beta_j^{neu} = \begin{cases} \beta_j - \epsilon_0 & j \in B_0 \\ \beta_j + \epsilon_0 & j \in B \setminus B_0, \end{cases}$$

wobei

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &:= \min_{i,j}\{\frac{c_{ij} - \alpha_i - \beta_j}{u_i + v_j} \mid u_i + v_j > 0\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \min_{i,j: u_i = 1, v_j = 1}\{c_{ij} - \alpha_i - \beta_j\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \min_{i \in A_0, j \notin B_0}\{c_{ij} - \alpha_i - \beta_j\} \end{aligned}$$

WICHTIG: S^{neu} enthält alle Matchingkanten aus M, alle Kanten aus S, die zwischen A_0 und B_0 verlaufen und mindestens eine Kante, die zwischen A_0 und $B \setminus B_0$ verläuft.

$\Longrightarrow$ Im nächsten Schritt nimmt $|A_0| + |B_0|$ um mindestens eins zu oder es gibt einen augmentierenden Pfad.

Gewichtetes bipartites Matching

// Initialisierung

$\alpha_i = 0 \forall i$;

$\beta_j = \min_i c_{ij} \forall j$;

$M = \emptyset$;

$S := \{(i,j) \mid c_{ij} = \alpha_i + \beta_j\}$;

// Iteration

while M nicht perfekt **do**

  Bestimme Mengen A_0, B_0 bzgl. des Graphen $(A \cup B, S)$ oder finde augmentierenden Pfad;

  while $\nexists$ augmentierender Pfad **do**

    Bestimme u_i, v_j, ϵ_0;

    Bestimme neues α_i, β_j und S;

    Bestimme neue Mengen A_0, B_0 (ausgehend von den derzeitigen) oder augmentierenden Pfad;

  end do

  Augmentiere Matching M;

end do

Allgemeines Matching

Formulierung als LP:

$$
\begin{array}{llllll}
(P) & \min & \sum_e c_e x_e & & & \\
& & \displaystyle\sum_{e:i\in e} x_e & = & 1 & \text{für alle } i \\
& & \displaystyle\sum_{e\subseteq U_k} x_e + y_k & = & \frac{|U_k|-1}{2} \quad (=: u_k) & \text{für alle } k \\
& & x_e & \geq & 0 & \text{für alle } e \\
& & y_k & \geq & 0 & \text{für alle } k,
\end{array}
$$

wobei $U_1, \ldots, U_N$ eine Aufzählung aller Teilmengen von V mit ungeraden Kardinalität ≥ 3 sei.

Zugehöriges duales Problem:

$$
\begin{array}{lllll}
(D) & \max & \sum_i \alpha_i + \sum_k u_k \gamma_k & & \\
& & \alpha_i + \alpha_j + \displaystyle\sum_{k:e\subseteq U_k} \gamma_k \leq c_e & & \text{für alle } e = \{i,j\}
\end{array}
$$

<u>Bem:</u>

$$
\begin{array}{llll}
\alpha_i & = & \frac{1}{2}\min\limits_{e:i\in e} c_e & \text{für alle } i \\
\gamma_k & = & 0 & \text{für alle } k
\end{array}
$$

ist dual zulässig.

Wende primal-duale Methode an:

Startlösung: $\surd$

In jeder Iteration betrachten wir:

$$\begin{array}{rcl} S_e & = & \{e = \{i,j\} \mid \alpha_i + \alpha_j + \sum_{k: e \subseteq U_k} \gamma_k = c_e\}, \\ S_b & = & \{k \mid \gamma_k = 0\}, \end{array}$$

$$\begin{array}{llrcll} (RP) & \min & \sum_i \xi_i + 2 \sum_k \eta_k & & & \\ & & \sum_{e: i \in e} x_e + \xi_i & = & 1 & \forall i \\ & & \sum_{e \subseteq U_k} x_e + y_k + \eta_k & = & u_k & \forall k \\ & & x_e & \geq & 0 & \forall e \in S_e \\ & & x_e & = & 0 & \forall e \notin S_e \\ & & y_k & \geq & 0 & \forall k \in S_b \\ & & y_k & = & 0 & \forall k \notin S_b \\ & & \xi_i, \eta_j & \geq & 0 & \forall i, k \end{array}$$

$$\begin{array}{llrcll} (RD) & \max & \sum_i \alpha_i + \sum_j u_k \gamma_k & & & \\ & & \alpha_i + \alpha_j + \sum_{k: \{i,j\} \in U_k} \gamma_k & \leq & 0 & \forall \{i,j\} \in S_e \\ & & \gamma_k & \leq & 0 & \forall k \in S_b \\ & & y_i & \leq & 1 & \forall i \in A \\ & & z_j & \leq & 1 & \forall j \in B \end{array}$$

GEWICHTETES MATCHING

// Initialisierung

$\alpha_i = \frac{1}{2} \min_{e:i \in e} c_e \forall i$;

$\gamma_k = 0 \forall k$;

$M = \emptyset$;

$S_b := \emptyset$;

// Iteration

while M nicht perfekt **do**

$$S_e := \{e = \{i, j\} \mid \alpha_i + \alpha_j + \sum_{k:e \subseteq U_k} \gamma_k = c_e\};$$

Konstruiere Graph G_s (bzgl. S_e und S_b);

Bestimme maximales Matching in G_s ausgehend von derzeitigem Matching M; dabei wird G_s zu G'_s;

Bestimme ausgehend von G'_s neue duale Lösung;

Bestimme ausgehend von maximalem Matching in G_s neues Matching M;

Bestimme neue Menge S_b;

end do