Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 1997/98
Semestralklausur (Wiederholung)
27. April 1998

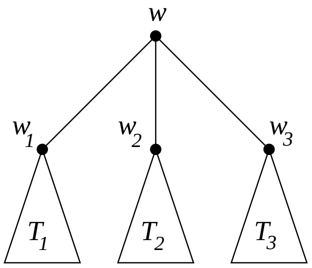
Diskrete Strukturen I

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei m eine fixe natürliche Zahl. Wir betrachten die Folge $\{a_n^{(m)}\}_{n\geq 0}$ mit $a_n^{(m)} = \sum_{k\geq 0}\binom{k}{m}\binom{n}{k}$. Bestimmen Sie eine geschlossene Darstellung der erzeugenden Funktion $A^{(m)}(z) = \sum_{n\geq 0} a_n^{(m)} z^n$.

Lösung. Es gilt

$$\begin{aligned} A^{(m)}(z) &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\binom{k}{m}\binom{n}{k}z^n = \sum_{k\geq 0}\binom{k}{m}\sum_{n\geq 0}\binom{n}{k}z^n \\ &= \sum_{k\geq 0}\binom{k}{m}\frac{z^k}{(1-z)^{k+1}} = \frac{1}{1-z}\sum_{k\geq 0}\binom{k}{m}\left(\frac{z}{(1-z)}\right)^k \\ &= \frac{1}{1-z}\frac{(\frac{z}{1-z})^m}{(1-\frac{z}{1-z})^{m+1}} = \frac{z^m}{(1-2z)^{m+1}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)
Sei T ein Baum. Die Wurzel w von T hat 3 Kinder w_1, w_2, w_3, die Wurzeln von Teilbäumen T_1, T_2 und T_3 sind.



Der Teilbaum T_1 besitzt (einschließlich w_1) 15 Knoten. Die Prozedur *Depth First Search (DFS)* (aus der Vorlesung) startet im Knoten w, der die Präorder-Nr. 1 erhält, und durchsucht zunächst den Teilbaum T_1, dann T_2 und schließlich T_3. Der Teilbaum T_2 enthält Knoten A, B, C mit folgenden Nummern:

	A	B	C
Präorder-Nr.	19	17	18
Postorder-Nr.	23	24	16

1. Ist einer der Knoten A, B oder C Wurzel eines Teilbaumes, der die anderen zwei Knoten enthält? Wenn ja, welcher?

2. Wieviele Knoten enthlgält der Teilbaum mit der Wurzel A (einschließlich A selbst)?

Lösung. Zunächst klären wir die Struktur des Baumes T_2. Der DFS Algorithmen arbeitet zunächst den Baum T_1 ab. Beim Verlassen von w_1 erhält dieser Knoten die Postorder-Nr. 15, da alle 14 inneren Knoten von T_1 bereits eine Postorder Nummer besitzen.

Wenn der Knoten w_2 besucht wird, wurden bereits alle Knoten in T_1 und die Wurzel w besucht (16 insgesamt), also erhält w_2 die Präorder-Nr. 17. Damit ist $w_2 = B$. Im nächsten Schritt wird ein Kind von w_2 besucht und bekommt die Präorder-Nr. 18. Dieser Knoten erhält aber gleichzeitig die nächste Postorder-Nr. 16, er hat also keine Kinder. Es handelt sich um den Knoten C.
Jetzt werden weitere Kinder von w_2 bearbeitet. Das nächste Kind erhält die Präorder-Nr. 19. Es handelt sich also um den Knoten A. Der Algorithmus DFS untersucht jetzt den Baum mit Wurzel A. Beim Verlassen dieses Baumes erhält der Knoten A die Postorder-Nr. 23. Weil nun B die nächste Postorder-Nr. besitzt, hat B außer C und A keine weiteren Kinder.

1. Aus obigen Ausführungen ist klar, daß der Knoten B zwei Kinder hat, A und C. Der Knoten C selbst besitzt keine weiteren Kinder.

2. Beim erstmaligen Besuch von A war die letzte vergebene Postorder-Nr. 16. Beim Verlassen von A wurde die Postorder-Nr. 23 vergeben. Weil B außer A und C keine weiteren Kinder besitzt, müssen die Postorder-Nummern 17 bis 22 an interne Knoten des Teilbaumes mit der Wurzel A vergeben worden sein. Dieser Baum enthält also 7 Knoten.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
An einem Bridgeturnier nehmen 16 Spieler teil. Jeder Spieler benötigt einen Partner, um eine *Mannschaft* zu bilden. Zwei Mannschaften unterscheiden sich nur durch die beteiligten Spieler. Jede Mannschaft benötigt eine gegnerische Mannschaft, um einen *Tisch* zu bilden. Zwei Tische unterscheiden sich nur durch die beteiligten Mannschaften. Eine Auslosung ist durch die Menge der Tische und die Mannschaften gegeben. Wieviele Möglichkeiten der Auslosung gibt es?

Lösung. Wir bilden zunächst die Mannschaften. Dazu wählen wir die erste Mannschaft aus 16 Personen aus – dafür gibt es $\binom{16}{2}$ Möglichkeiten. Dann aus restlichen 14 Personen die zweite Mannschaft – $\binom{14}{2}$ Möglichkeiten, usw. Insgesamt ergeben sich

$$\binom{16}{2}\binom{14}{2}\cdots\binom{4}{2}\binom{2}{2}$$

Möglichkeiten geordnete Mannschaften zu bilden. Da sich aber zwei Mannschaften nur durch die beteiligten Personen unterscheiden, muß diese Anzahl noch durch 8! dividiert werden.
Völlig analog bilden wir Tische. Es stehen 8 bereits festgelegte Mannschaften zur Verfügung. Wir wählen den ersten Tisch aus – dafür gibt es $\binom{8}{2}$ Möglichkeiten, usw. Insgesamt ergeben sich also

$$\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$$

Möglichkeiten geordnete Tische zu bilden. Diese Anzahl muß noch durch 4! dividiert werden. Somit erhalten wir

$$\frac{\binom{16}{2}\binom{14}{2}\cdots\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{8!}\cdot\frac{\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{4!}$$

mögliche Auslösungen.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei $S_{n,k}$ die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge in k nichtleere Teilmengen (Stirlingsche Zahlen 2. Art). Beweisen Sie:

$$S_{n+1,k+1} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}S_{i,k}.$$

Lösung. Sei $\Pi_{n,k}$ die Menge aller Zerlegungen einer n-elementigen Menge in k nichtleere Teilmengen. Es gilt $|\Pi_{n,k}| = S_{n,k}$. Eine Zerlegung $Z = \{M_1, \ldots, M_{k+1}\}$ aus $\Pi_{n+1,k+1}$ kann wie folgt konstruiert werden: Sei $1 \leq i \leq n$. Wir wählen i Elemente $j_1, \ldots, j_i$ aus $\{1, \ldots, n\}$ aus. Sei $J_i = \{j_1, \ldots, j_i\}$ und $Z_i' \in \Pi_{i,n}$ eine Zerlegung von J_i. Dann ist die Zerlegung

$$Z_i' \cup \{\{1, \ldots, n+1\} \setminus J_i\}$$

aus $\Pi_{n+1,k+1}$.
Es ist nicht schwer zu sehen, daß auf diese Weise jede Zerlegung genau einmal erhalten wird. Zunächst ist klar, daß jede Zerlegung aus $\Pi_{n+1,k+1}$ erhalten werden kann, denn durch das Entfernen derjenigen Teilmenge, die die Zahl $n+1$ enthält, entsteht eine Zerlegung einer Menge mit höchstens n Elementen in k Teilmengen. Andererseits, wenn aus einer Zerlegung aus $\Pi_{n+1,k+1}$ die Teilmenge, die die Zahl $n+1$ enthält, entfernt wird, sind die Menge J_i (s. oben) und ihre Zerlegung eindeutig festgelegt. Damit induziert jede Zerlegung von J_i in k Teilmengen genau eine Zerlegung von $\{1, \ldots, n+1\}$ in $k+1$ Teilmengen.
Es gibt $\binom{n}{i}$ Möglichkeiten, $1 \leq i \leq n$ Elemente aus n auszuwählen. Zu jeder Auswahl von i Elementen gibt es $S_{i,k}$ Zerlegungen in k Teilmengen. Die Gesamtanzahl ist also $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_{i,k}$.

Aufgabe 5 (1 Punkt)

Für eine beliebige Konstante k gilt $k \cdot n = O(n)$. Wir führen folgende Berechnung durch:

$$\frac{n^2(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} kn = \sum_{k=1}^{n} O(n) = O(n) \sum_{k=1}^{n} 1 = O(n) \cdot n = O(n^2).$$

Das ist aber offensichtlich falsch. Warum?

Lösung. Die Gleichheit $\sum_{k=1}^{n} kn = \sum_{k=1}^{n} O(n)$ ist falsch, da hier k keine Konstante ist, sondern von n abhängt.

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Vergleichen Sie genau das asymptotische Verhalten der Funktionen $n!$ und n^n. Gesucht ist die schärfstmögliche Aussage (verwenden Sie die Landau-Symbole O, o, Ω, ω, usw).

Lösung. Nach der Stirlingschen Formel gilt

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\sqrt{2\pi n}\left(\frac{1}{e}\right)^n}{n^n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{1}{e}\right)^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{1}{e}\right)^n = 0.\end{aligned}$$

Somit gilt $n! \in o(n^n)$.

Aufgabe 7 (1+1 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt (keine Begründung erforderlich)?

1. $\sum_{i\geq -2} 2^{-i} \in O(\frac{5}{2})$
2. Für zwei Funktionen f und g gilt: Wenn $f \in O(g)$, dann $\sqrt{f \cdot g} \in o(g)$.

Lösung. 1. Es existiert ein $\alpha \geq 0$ mit

$$\sum_{i \geq -2} 2^{-i} = 6 + \sum_{i \geq 0} 2^{-i} = 6 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 8 \leq \alpha \frac{5}{2}.$$

Damit ist die Aussage korrekt.

2. Diese Aussage ist falsch, denn für $f = g$ gilt $f \in O(g)$ aber $\sqrt{g^2} = |g| \notin o(g)$.

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Bestimmen Sie eine Rekursionsgleichung minimaler Ordnung (mit konstanten Koeffizienten), die durch die Folge $a_n = n2^n + 3$, $n \geq 0$, erfüllt wird.

Lösung. 1. Eine Möglichkeit besteht darin, aus der Vorschrift der Folge die Rekursion direkt abzuleiten. Dazu betrachten wir eine neue Folge $b_n := a_n - 2a_{n-1}$. Wir erhalten $b_n = 2^n - 3$. Nun betrachten wir die Folge $c_n := b_n - 2b_{n-1}$. Die Folge c_n ist konstant und es gilt $c_n = 3$, für alle $n \geq 2$. Somit gilt $c_n - c_{n-1} = 0$, für $n \geq 3$. Nach Einsetzen der Formeln für c_n und b_n erhalten wir

$$a_n - 5a_{n-1} + 8a_{n-2} - 4a_{n-3} = 0.$$

2. Eine andere Lösung benutzt die erzeugende Funktion der Folge a_n. Es gilt

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} (n2^n + 3) z^n = \sum_{n \geq 0} \binom{n}{1} (2z)^n + 3 \sum_{n \geq 0} z^n \\ &= \frac{2z}{(1-2z)^2} + 3\frac{1}{1-z} = \frac{10z^2 - 10z + 3}{(1-2z)^2 1 - z} = \frac{10z^2 - 10z + 3}{-4z^3 + 8z^2 - 5z + 1}. \end{aligned}$$

Aus dem Nenner kann die Rekursionsgleichung direkt abgelesen werden:

$$a_n - 5a_{n-1} + 8a_{n-2} - 4a_{n-3} = 0.$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Sei x eine Variable. Berechnen Sie eine geschlossene Form für $\sum_{k=0}^{n} kx^k$.

Lösung. Zunächst gilt $\Delta x^k = x^{k+1} - x^k = (x-1)x^k$ und damit $\sum x^k = \frac{1}{x-1} x^k$. Wir berechnen jetzt $\sum kx^k$ durch partielle Summation (mit $u = k$ und $\Delta v = x^k$). Es gilt

$$\begin{aligned} \sum kx^k &= k\frac{1}{x-1}x^k - \sum x^{k+1} = k\frac{1}{x-1}x^k - \frac{1}{x-1}\sum x^{k+1} = k\frac{1}{x-1}x^k - \frac{1}{(x-1)^2}x^{k+1} \\ &= \frac{k(x-1)x^k - x^{k+1}}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = \sum kx^k \Big|_0^{n+1} = \frac{k(x-1)x^k - x^{k+1}}{(x-1)^2}\Big|_0^{n+1} = \frac{(n+1)(x-1)x^{n+1} - x^{n+2} + x}{(x-1)^2}.$$

Aufgabe 10 (1+1+2 Punkte)

Sei S_{10} die Permutationsgruppe der Menge $\{1, \ldots, 10\}$.

1. Welche Ordnung hat das Element $(268)(1435)(79)(10)$ (Zyklenschreibweise)?

2. Geben Sie eine Permutation aus S_{10} der Ordnung 6 an.

3. Bestimmen Sie das Maximum der Ordnungen aller Elemente aus S_{10}.

Lösung. 1. Die Ordnung einer Permutation ist das kgV der Zyklenlängen. Es gilt also $\mathrm{ord}((268)(1435)(79)(10)) = \mathrm{kgV}($

2. Z.B. $(123456)(7)(8)(9)(10)$. Das kgV der Zyklenlängen ist 6 und damit $\mathrm{ord}((123456)(7)(8)(9)(10)) = 6$.

3. Wir können uns überzeugen, daß die Permutation mit Zyklenlängen 2,3,5 die maximale Ordnung 30 besitzen.

Aufgabe 11 (2 Punkte)

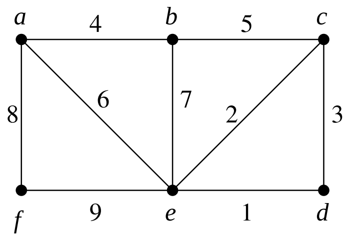
Wieviele Blätter hat der Baum mit dem Prüfer-Code

$$(1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)?$$

Lösung. Der Graph hat um zwei Knoten mehr als die Länge des Codes ist, also 13. Wir wissen, daß genau diejenigen Knoten Blätter sind, deren Nummern im Prüfer-Code nicht vorkommen. Der Baum hat also 9 Blätter.

Aufgabe 12 (3 Punkte)

Enthält der minimale Spannbaum des gewichteten Graphen G mit Knoten $\{a, b, c, d, e, f\}$ in der folgenden Abbildung die Kante (a, e)? (Der minimale Spannbaum ist hier eindeutig bestimmt.)



Lösung. Der Algorithmus für minimale Spannbäume (MSB) erzeugt den Baum mit Kanten (f, a), (a, b), (b, c), (c, e), (e, d). Die Kante (a, e) kommt also nicht im MSB vor. Da der MSB in diesem Fall eindeutig ist, kommt die Kante (a, e) in keinem MSB vor.

Viel Erfolg!