Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 1997/98
Semestralklausur – Lösungen
(2. Wiederholung)
15. Juli 1998

Diskrete Strukturen I

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $an^2 + n$ ist $O(n^2 + an)$;

(ii) $an^2 + n$ ist $o(n^2 + an)$?

Lösung. (i) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an^2 + n}{n^2 + an} = \lim_{n\to\infty} \frac{a + \frac{1}{n}}{1 + a\frac{1}{n}} = a < \infty.$$

Es gilt also $an^2 + n = O(n^2 + an)$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Aus der vorherigen Gleichung ist ersichtlich, daß $an^2 + n = o(n^2 + an)$ dann und nur dann, wenn $a = 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei F_n die n-te Fibonacci Zahl. Wir wissen, daß F_n in der Form

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{\varphi}^n$$

dargestellt werden kann, wobei $\varphi \approx 1.618$ und $\bar{\varphi} \approx -0.618$. Entscheiden Sie (mit kurzer Begründung), welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind: (a) F_n ist $O(2^n)$, (b) F_n ist $o(2^n)$, (c) F_n ist $\Omega(2^n)$, (d) F_n ist $\Omega_\infty(2^n)$.

Lösung. Es gilt

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{\varphi}^n < \frac{2}{\sqrt{5}}\varphi^n \approx 0.9 \cdot 1.6^n. \tag{1}$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{0.9 \cdot 1.6^n}{2^n} = 0$$

gilt, daß $F_n = o(2^n)$ und damit auch $F_n = O(2^n)$. Andererseits gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{0.9 \cdot 1.6^n} \geq \lim_{n\to\infty} 1.2^n = \infty$$

und somit $F_n \neq \Omega(2^n)$. Wegen $F_n = o(2^n)$ muß auch $F_n \neq \Omega_\infty(2^n)$ gelten.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Geben Sie mit Hilfe der Stirlingschen Formel eine möglichst gute asymptotische Abschätzung (mit Landau Symbolen) für $\binom{2n}{n}$.

Lösung. Mit Hilfe der Stirlingschen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \Theta\left(\frac{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{(\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n})^2}\right) = \Theta(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}2^{2n+\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}) \\ &= \Theta(4^n n^{-\frac{1}{2}}).\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei G der Graph in der Abbildung 1. Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn der Algorithmus DFS (Depth

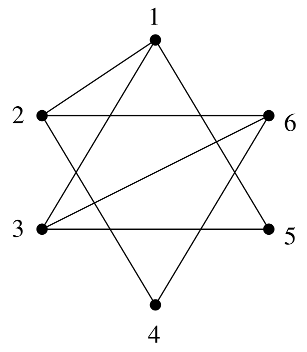

Abbildung 1

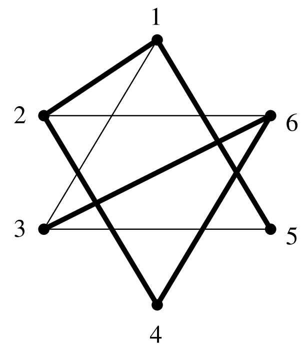

Abbildung 2

First Search) im Knoten 1 gestartet wird, ist der resultierende Spannbaum immer ein Pfad (hat also keine Verzweigungen).

Lösung. Der Algorithmus DFS arbeitet nichtdeterministisch, indem er unter allen Nachbarn eines Knoten einen beliebigen auswählt, von wo aus die Durchsuchung des Graphen fortgesetzt wird. DFS kann ausgehend vom Knoten 1 folgenden Spannbaum konstruieren.

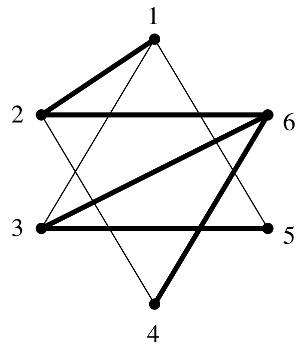

Abbildung 3

Damit kann DFS so vorgehen, daß der resultierende Spannbaum kein Pfad ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei G der Graph in der Abbildung 1. Kann der in der Abbildung 2 dargestellte Spannbaum von G durch einen Aufruf von BFS (Breadth First Search) im Knoten 1 enstanden sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung. Der Algorithmus BFS betrachtet zunächst alle Nachbarn eines Knoten bevor weitere Knoten untersucht werden. Daher werden zunächst zum Spannbaum die Kanten $(1,2)$, $(1,3)$ und $(1,5)$ hinzugefügt, bevor BFS anfängt, die Knoten 2, 3 und 5 zu bearbeiten. Die Kante $(3,6)$ ist demzufolge keine Baumkante, weil zum Zeitpunkt der Bearbeitung von 6 ist der Knoten 3 bereits besucht worden.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die additiven Gruppen $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ (mit komponentenweiser Addition $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$) und $(\mathbb{Z}_4, +)$ isomorph sind. Zeigen Sie zunächst, daß $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ nicht zyklisch, $(\mathbb{Z}_4, +)$ dagegen zyklisch ist. Überlegen Sie dann, ob es zwischen diesen Gruppen einen Isomorphismus geben kann.

Lösung. Wir zeigen zunächst, daß alle Elemente in $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ die Ordnung 2 haben. Das Element $(0,0)$ ist das neutrale Element in $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(0,0) + (0,0) &= (0,0)\\ (0,1) + (0,1) &= (0,0)\\ (1,0) + (1,0) &= (0,0)\\ (1,1) + (1,1) &= (0,0).\end{aligned}$$

Damit ist die Ordnung jedes Elementes 2 und die Gruppen kann somit nicht zyklisch sein, denn sonst müßte ein Element der Ordnung 4 existieren.
Es kann leicht nachgeprüft werden, daß $(\mathbb{Z}_4, +)$ durch 1 erzeugt wird. Diese Gruppe ist also zyklisch.
Wir nehmen jetzt an, daß es einen Isomorphismus $\varphi : (\mathbb{Z}_4, +) \to (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ geben würde. Sei $\varphi(1) = e \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Dann gilt:

$$(0,0) = e + e = \varphi(1) + \varphi(1) = \varphi(1+1) = \varphi(2).$$

Somit muß 2 das neutrale Element 0 von $(\mathbb{Z}_4, +)$ sein, da Homomorphismen neutrale Elemente in neutrale Elemente überführen. Widerspruch.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Beweisen Sie, daß für eine Primzahl $p > 2$ die Abbildung der additiven Gruppe

$$\begin{aligned}(\mathbb{Z}_p, +) &\to (\mathbb{Z}_p, +)\\ \bar{a} &\mapsto \bar{a}^p = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{p \text{ mal}} \bmod p\end{aligned}$$

ein Homomorphismus ist.

Lösung. Wir müssen beweisen, daß

$$(\bar{a} + \bar{b})^p = \bar{a}^p + \bar{b}^p.$$

Wir verwenden für die linke Seite den Binomialsatz und erhalten:

$$(\bar{a} + \bar{b})^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \bar{a}^i \bar{b}^{p-i}. \tag{2}$$

Da für $1 \leq i \leq p-1$ gilt, daß $i < p$ und $p - i < p$, so ist das Produkt $i!(p-i)!$ nicht durch p teilbar. Damit muß für $1 \leq i \leq p-1$ der Binomialkoeffizient $\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!}$ durch p teilbar sein. In der Summe (2) sind also nur der erste und der letzte Koeffizient von Null verschieden. Die Behauptung folgt dann unmittelbar.

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Sei f_n durch die folgende Rekursion gegeben: $f_0 = 1$, $f_1 = 7$, $f_2 = 37$,

$$f_n = 7f_{n-1} - 15f_{n-2} + 9f_{n-3}.$$

Entscheiden Sie, ob f_n ist $O(4^n)$?

Lösung. Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom $q(z)$. Es gilt

$$q(z) = z^3 - 7z^2 + 15z - 9 = (z-1)(z-3)^2.$$

Die geschlossene Lösung der Rekursion hat also die Form

$$f_n = (an+b)3^n + c1^n,$$

für gewisse Konstanten $a > 0, b, c$.
Wir erhalten

$$(an+b)3^n + c1^n = 3^{n+\log_3(an+b)} + c \leq 3^{n+\log_3((a+1)n+b)},$$

für $n \geq n_0$.
Da ein Logarithmus langsamer wächst als ein Polynom, gibt es eine Grenze n_1, so daß

$$(\forall n \geq n_1)(\log_3((a+1)n+b)) \leq (\log_3 4 - 1)n).$$

Wir erhalten also für alle $n \geq \max\{n_0, n_1\}$

$$f_n \leq 3^{n+(\log_3 4-1)n} = 3^{\log_3 4 \cdot n} = 4^n.$$

Aufgabe 9 (5 Punkte)
Sei R_n die Gesamtfläche aller Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen, deren Breite höchstens n ist und deren Höhe kleiner oder gleich der Breite ist. Gilt, $R_n = o(n^4)$?

Lösung. Sei R_{ij} ein Rechteck mit Höhe j und Breite i. Die Fläche von R_{ij} ist $i \cdot j$.
Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \Theta(n^3)$, da $\Delta i^3 = 3i^2 + 3i + 1$ und damit nach symbolischer Summation $\sum i^2 = \frac{1}{3}i^3 + \sum i + \sum \frac{1}{3}$.
Dann haben wir

$$\begin{aligned} R_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} R_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} ij = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{i} j \\ &\geq \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} i^3 \geq \frac{1}{3}\frac{n}{2}(\frac{n}{2})^3 = \frac{n^4}{48}. \end{aligned}$$

Es gilt also, daß $R_n = \Omega(n^4)$ und damit ist $R_n = o(n^4)$ unmöglich.

Aufgabe 10 (5 Punkte)
Sei Σ ein Alphabet, das aus 16 (paarweise verschiedenen) Buchstaben besteht. Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus disem Alphabet 3 nichtleere Wörter zu bilden? Jeder Buchstabe muß dabei genau einmal verwendet werden. Die Reihenfolge der Wörter wird nicht in Betracht gezogen.

Lösung. Wir bilden zunächst alle 16! Permutationen aus 16 Buchstaben. Nun teilen wir jedes so erhaltene Wort in 3 Teile, indem wir zwei Buchstaben auswählen, die den Anfang des 2. und des 3. Teilwortes bilden. Dafür gibt es $\binom{15}{2}$ Möglichkeiten, da der erste Buchstabe nicht ausgewählt werden kann (sonst ist das erste Teilwort leer). Es ergeben sich also $16!\binom{15}{2}$ Möglichkeiten 3 nichtleere Wörter zu bilden. Weil die Reihenfolge der Teilwörter nicht signifikant ist, muß diese Anzahl noch durch 3! dividiert werden. Es gibt also

$$\frac{16!\binom{15}{2}}{3!}$$

verschiede Möglichkeiten 3 nichtleere Wörter zu bilden.

Aufgabe 11 (5 Punkte)

Eine k-*Komposition* einer natürlichen Zahl n ist eine Folge natürlicher Zahlen $n_1, \ldots, n_k$, $n_i \geq 0$, mit $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Geben Sie die Anzahl der k-Kompositionen einer Zahl n an.
Beachten Sie, daß einige Teile Null sein können und die Reihenfolge der einzelnen Teile wichtig ist (im Gegensatz zu Partitionen).

Lösung. Wir modellieren die Kompositionen wie folgt. Wir schreiben zunächst $n + k - 1$ Striche. Daraus wählen wir $k - 1$ Striche als Markierungen aus. Nun gibt die Anzahl der Striche zwischen zwei Markierungen einen Summanden der Komposition. Es ist klar, daß keine Komposition ausgelassen wurde und alle so erhaltenen Kompositionen verschieden sind. Damit gibt es

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

k-Kompositionen von n.
Es gibt eine noch einfachere Antwort, indem wir n nichtunterscheidbare Bälle (Striche) in k unterscheidbare Urnen (Teile) werfen. Dafür gibt es $k^{\bar{n}}$ Möglichkeiten.