Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 1997/98
Semestralklausur
27. Februar 1998

Diskrete Strukturen I

Bearbeitungszeit für die 12 Aufgaben ist 105 Minuten. Als Hilfsmittel ist nur ein beliebig beschriebenes DIN A4-Blatt erlaubt. Zum Bestehen müssen von den 40 möglichen Punkten mehr als 16 Punkte erreicht werden. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und geben Sie auf dem Umschlag an, wieviele Blätter Sie abgeben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün.

Aufgabe 1 (1 Punkt)

Wann (ungefähr) und in welcher Stadt lebte Euklid?

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

(a) Im Parlament von Phantasia gibt es 201 Sitze und drei Parteien. Wieviele Möglichkeiten von Sitzverteilungen (d.h. Anzahlen von Abgeordneten jeder Partei), bei denen keine Partei die absolute Mehrheit hat, gibt es?
(b) Auf wieviele verschiedene Arten können sich 12 (unterscheidbare) Personen in 4 Gruppen zu jeweils drei Personen aufteilen?

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei g ein Element einer Gruppe G und bezeichne d die Ordnung von g in G. Sei n eine natürliche Zahl. Was ist die Ordnung von g^n in G? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 4 (1+1+2+2 Punkte)

Sei S_3 die Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1,2,3\}$.
(a) Was ist die Ordnung von S_3?
(b) Was ist das Maximum der Ordnungen aller Elemente von S_3?
(c) Beweisen oder widerlegen Sie die Behauptung, daß S_3 abelsch ist.
(d) Zeigen Sie, daß die Teilmenge $A_3 = \{(1)(2)(3), (123), (132)\}$ (Zyklenschreibweise) eine Untergruppe von S_3 ist.

Aufgabe 5 (1+1+1+1 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (keine Begründungen nötig)
(a) $\sum_{i=n}^{2n} i^3 \in O(\frac{1}{4}n^4)$
(b) $\sum_{i=1}^{n} 3^i \in O(3^n)$
(c) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} i \cdot j \in o(n^4)$
(d) $F_n \in \Theta(2^n)$ (wobei F_n die n-te Fibonacci-Zahl ist)

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Was ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$?

Aufgabe 7 (2+3 Punkte)
Leiten Sie einfache Ausdrücke (in n) für die folgenden Summen her:

$$(a) \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k} \qquad\qquad (b) \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} s_{n,2k}$$

wobei die $s_{n,k}$ die Stirling-Zahlen erster Art bezeichnen, d.h. $s_{n,k}$ gibt die Anzahl der Permutationen von $\{1,\ldots,n\}$ mit k Zyklen an.
Hinweis: In der Vorlesung wurde gezeigt, daß

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} s_{n,k}(-1)^{n-k}x^k$$

Aufgabe 8 (6 Punkte)
Bestimmen Sie die explizite Darstellung der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die rekursiv durch

$$a_0 := 0 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = 3a_n + 2^n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

definiert ist.
Hinweis: Bei manchen Lösungsmethoden könnte vielleicht die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

hilfreich sein.

Aufgabe 9 (2 Punkte)
Zeigen Sie, daß für alle $n \geq 2$ jeder Graph mit n Knoten zwei Knoten gleichen Grades enthält.

Aufgabe 10 (1 Punkt)
Zeichnen Sie einen Digraphen, dessen Adjazenzmatrix A die Eigenschaft $A^3 = I$ hat (I = Einheitsmatrix).

Aufgabe 11 (2 Punkte)
Welchen Durchmesser hat der Baum mit dem Prüfer-Code $(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$?

Aufgabe 12 (2 Punkte)
Die mit A,B,…,H bezeichneten Knoten eines Baumes werden durch eine Tiefensuche mit folgenden Präorder- und Postorder-Nummern versehen:

	A	B	C	D	E	F	G	H
Präorder-Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8
Postorder-Nummer	8	4	1	2	3	7	5	6

Zeichnen Sie diesen Baum.

Viel Erfolg!