Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 1996/97
Übungsblatt 1
11. Nov. 1997

Diskrete Strukturen I

(Abgabetermin: Dienstag, 18. Nov. 1997, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Beweisen Sie folgenden Satz:
Seien $a \geq 1, b > 1$ und $k \in \mathbb{N}$ konstant, $f(n)$ eine Funktion und $T(n)$ definiert durch die Rekursionsgleichung $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, $n = b^k$. Dann ist

$$T(n) = \begin{cases} \theta(n^{\log_b a}), & \text{falls } f(n) = O(n^{\log_b a - e}) \text{ für ein konstantes } e > 0, \\ \theta(n^{\log_b a} \lg n), & \text{falls } f(n) = \theta(n^{\log_b a}), \\ \theta(f(n)), & \text{falls } f(n) = \Omega(n^{\log_b a + e}) \text{ für ein konstantes } e > 0 \\ & \text{und } af(n/b) \leq cf(n) \text{ für ein konstantes } c < 1; \end{cases}$$

dabei bezeichnet lg den Logarithmus zur Basis 2.

Aufgabe 2

(a) Sei $f(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(n) := \begin{cases} n^2 & n \text{ gerade}, \\ 10n & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß $f(n) = O(n^2)$, aber weder $f(n) = o(n^2)$ noch $n^2 = O(f(n))$.
(b) Zeigen Sie, daß es zu Funktionen f und h mit $f(n) = o(h(n))$ immer eine Funktion g gibt mit

$$f(n) = o(g(n)) \text{ und } g(n) = o(h(n)) \text{ .}$$

Aufgabe 3

Sei $T(n) = 2T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + \lg n$. Zeigen Sie

$$T(n) = O(\lg n \, \lg\lg n) \text{ .}$$

Hinweis: Wählen Sie eine geeignete Substitution für n.

Aufgabe 4

Schätzen Sie mit Hilfe der Stirlingschen Formel den Binomialkoeffizienten

$$f(2n) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

ab. Implementieren Sie die Funktion $\binom{2n}{n}$ und ihre Annäherung durch die Stirlingsche Formel in Maple und stellen Sie den Quotienten beider Funktionen für $n = 10, 20, \ldots, 100$ graphisch dar.
Hinweis: Die Implementierung der Funktionen erfolgt am einfachsten durch *Operatoren* (Hilfe durch Eingabe `?operators,functional` in Maple). Eine Darstellung in Zehnerschritten kann durch den Aufruf `plot(f(n), n=10..100, numpoints = 10)` erzielt werden.