Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 1997/98
Übungsblatt 10
10. Feb. 1998

Diskrete Strukturen I

(Abgabetermin: Dienstag, den 10. Feb. 1998, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

1. Sei $A(z)$ die Erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$. Bestimmen Sie die Erzeugende Funktion für $\int_0^z A(t)dt$.
2. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$. Bestimmen Sie (in geschlossener Form) die Erzeugende Funktion von (a_n).

Aufgabe 2

Sei p eine Primzahl. Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sei $e_p(n)$ die größte Potenz von p, die n teilt.

(i) Beweisen Sie

$$e_p(n!) = \sum_{k\geq 1} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor.$$

(ii) Geben Sie eine möglichst genaue obere Schranke für $e_p(n!)$ an.

Aufgabe 3

Die Menge alle Brüche $0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$ mit $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$ läßt sich auf folgende Weise induktiv konstruieren. Sei $S_0 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$. Die Menge S_{r+1} entsteht aus S_r, indem in S_r zwischen zwei aufeinanderfolgende Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{m'}{n'}$ der Bruch $\frac{m+m'}{n+n'}$ eingefügt wird.

(weiter Rückseite)

Beweisen Sie zunächst, daß für alle $r \geq 0$ gilt:

(i) Wenn $\frac{m}{n}$ und $\frac{m'}{n'}$ zwei aufeinanderfolgende Brüche in S_r sind, so gilt

$$\frac{m}{n} < \frac{m+m'}{n+n'} < \frac{m'}{n'}.$$

(ii) In jedem Bruch in S_r sind der Zähler und der Nenner teilerfremd.

Hinweis: Beweisen Sie, daß für zwei aufeinanderfolgende Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{m'}{n'}$ gilt $m'n - mn' = 1$.

Aufgabe 4

Sei $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n > 0$ eine Folge natürlicher Zahlen. Zeigen Sie, daß $(d_1, \ldots, d_n)$ genau dann die Folge der Knotengrade in einem Baum ist, wenn $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.