Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 1997/98
Übungsblatt 11
17. Feb. 1998

Diskrete Strukturen I

(Abgabetermin: Dienstag, den 17. Feb. 1998, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Seien m_1 und m_2 zwei teilerfremde ganze Zahlen, $m_i \geq 2$. Beweisen Sie, daß die additiven Gruppen $\langle \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2}, + \rangle$ und $\langle \mathbb{Z}_{m_1 m_2}, + \rangle$ isomorph sind.
Bemerkung: Die Addition in $\langle \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2}, + \rangle$ wird komponentenweise ausgeführt, d.h. $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Aufgabe 2

1. Seien $m_1, m_2, \ldots, m_k$ paarweise teilerfremde natürliche Zahlen, $m_i \geq 2$. Geben Sie ganze Zahlen $n_1, \ldots, n_k$ derart an, daß $n_i \equiv \delta_{ij} \mod m_j$ gilt, wobei

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Seien $m_1, m_2, \ldots, m_k$ wie oben. Seien außerdem $a_1, \ldots, a_k$ mit $0 \leq a_i < m_i$ gegeben. Bestimmen Sie die Lösung x des Systems

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \mod m_1 \\ &\vdots \\ x &\equiv a_k \mod m_k. \end{aligned}$$

3. Seien $m_1 = 2$, $m_2 = 17$, $m_3 = 15$. Bestimmen Sie ein $0 \leq a < m_1 m_2 m_3$ mit

$$\begin{aligned} a &\equiv 0 \mod 2 \\ a &\equiv 11 \mod 17 \\ a &\equiv 6 \mod 15. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Das *Komplement* eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $\bar{G} = (V, \bar{E})$ mit $(\forall u, v \in V)((u, v) \in \bar{E} \Leftrightarrow (u, v) \notin E)$. Ein Graph G heißt *selbstkomplementär*, wenn G isomorph zu $\bar{G}$ ist.

1. Zeigen Sie, daß P_4 selbstkomplementär ist.
2. Zeigen Sie, daß in jedem selbstkomplementären Graphen mit n Knoten die Eigenschaft $n \equiv 0 \bmod 4$ oder $n \equiv 1 \bmod 4$ erfüllt ist.

Aufgabe 4

Gibt es für jedes $n \geq 2$ einen unzusammenhängenden Graphen G mit n Knoten und $m > \binom{n-1}{2}$ Kanten? Begründen Sie Ihre Antwort.