Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 1997/98
Übungsblatt 2
25. Nov. 1997

Diskrete Strukturen I

(Abgabetermin: Dienstag, 25. Nov. 1997, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Geben Sie je ein Beispiel einer Algebra $\mathbb{A}$ mit möglichst kleiner Trägermenge und mit einem binären Operator an, so daß gilt:

1. $\mathbb{A}$ hat ein Eins-, aber kein Nullelement;
2. $\mathbb{A}$ hat ein linkes, aber kein rechtes Nullelement;
3. jedes Element hat ein Inverses;
4. $\mathbb{A}$ hat mindestens zwei Elemente, jedes Element hat ein Linksinverses, und nur das Einselement hat ein Rechtsinverses.

Aufgabe 2
Entfällt!

Sei eine Algebra mit einem linken Einselement l und einem rechten Nullelement r gegeben. Beweisen Sie, daß

$$l = r \ .$$

Aufgabe 3

Sei G eine Gruppe, deren Trägermenge eine gerade Anzahl von Elementen hat. Zeigen Sie, daß es ein Element $g \in G$, $g \neq 1$ gibt, so daß

$$g = g^{-1} \ .$$

Aufgabe 4

Wir betrachten die Gruppe $AutQ$ aller Automorphismen des Quadrats, wie in der Vorlesung besprochen: I – Identität, R – Rotation um 90 Grad (im positiven Sinn), R^2 – Rotation um 180 Grad, R^3 – Rotation um 270 Grad, H – Spiegelung um die vertikale Achse, V – Spiegelung um die horizontale Achse, U – Spiegelung um die links-unten-rechts-oben Diagonale, D – Spiegelung um die links-oben-rechts-unten Diagonale.

(a) Erstellen Sie mit Hilfe von MAPLE die komplette Verknüpfungstabelle von $AutQ$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von MAPLE, daß in $AutQ$ die Teilmenge $\{I, R, R^2, R^3\}$ der Rotationen um $i \cdot \frac{\pi}{2}$, $i = 0, \ldots, 3$, einen Normalteiler bildet.

Hinweise:

- Die Symbole D und I sind in MAPLE reserviert und können nicht als Funktionsnamen verwendet werden.

- Die Übersichtlichkeit der Darstellung kann durch die Verwendung des `alias` Makros (s. `?alias`) wesentlich erhöht werden. Wenn die Liste `[1,2,3,4]` das Ausgangsquadrat und `[4,1,2,3]` das um 90 Grad rotierte Quadrat repräsentiert, so liefert nach

  ```
  alias(QId = [1,2,3,4], QRot = [4,1,2,3]);
  ```

  die Funktion `R` auf `QId` das Ergebnis `QRot` und nicht die Liste `[4,1,2,3]`.