Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 1997/98
Übungsblatt 4
2. Dez. 1997

Diskrete Strukturen I

(Abgabetermin: Dienstag, den 9. Dez. 1997, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Sei G die Automorphismengruppe des Quadrats in der Ebene und $\tilde{G}$ die durch Linksmultiplikation gegebene Darstellung von G als Transformationsgruppe, wie in der Vorlesung angegeben. Die Elemente von $\tilde{G}$ sind also die Abbildungen $\tilde{g}$ mit

$$\tilde{g} \; : \; G \ni h \mapsto g \circ h \in G \text{ für alle } h \in G \; ,$$

wobei $\circ$ der Gruppenoperator in G ist, also die Komposition von Automorphismen des Quadrats.

Geben Sie die Elemente von $\tilde{G}$ in Zyklendarstellung an.

Aufgabe 2

Sei G eine Gruppe und $\hat{G}$ die Menge der Abbildungen $\hat{g}$, $g \in G$, die durch

$$\hat{g} \; : \; G \ni h \mapsto h \circ g \in G \text{ für alle } h \in G$$

gegeben sind (also Rechtsmultiplikation in G). Zeigen Sie, daß

$$\hat{} \; : \; G \to \hat{G}$$

einen Gruppenisomorphismus liefert.

Aufgabe 3

Sei $\phi \in S_n$ eine Permutation der Zahlen $\{1, \ldots, n\}$. Beweisen Sie detailliert das in der Vorlesung angegebene Korollar, daß die Ordnung der von ϕ erzeugten Untergruppe $\langle \phi \rangle$ von S_n gleich dem kgV der Längen der Zyklen von ϕ ist.

Aufgabe 4

Sei G eine endliche abelsche Gruppe und $m = \max\{\mathrm{ord}(g) \,|\, g \in G\}$, d.h. die maximale Ordnung eines Elements in G.

1. Zeigen Sie, daß, falls zwei Elemente aus G zueinander teilerfremde Ordnungen m_1 und m_2 haben, es in G auch ein Element der Ordnung $m_1 m_2$ gibt.
2. Zeigen Sie, daß die Ordnung eines jeden Elementes in G ein Teiler von m ist.

3.* Sei p eine Primzahl. Betrachten Sie das Polynom $x^{p-1} - 1 = 0$ über $\mathbb{Z}_p^*$ und schließen Sie, daß $\mathbb{Z}_p^*$ unter Multiplikation mod n eine zyklische Gruppe ist.

Bemerkung: Der dritte Teil der Aufgabe 4 (Sternaufgabe) hat einen relativ höheren Schwierigkeitsgrad und ist *nicht* obligatorisch. Die Lösung dieser Aufgabe bringt 4 extra Punkte (insgesamt max. 44).