Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

SS 1998
Semestralklausur
29. Juli 1998

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1 (2+3 Punkte)

Fünf Würfel werden gleichzeitig geworfen. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz für die Summe der Augenzahlen.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)

Gegeben seien drei Urnen:
Urne 1 enthält eine weiße und eine schwarze Murmel, Urne 2 eine schwarze und vier weiße Murmeln und Urne 3 enthält je drei weiße und schwarze Murmeln. Ein Würfel wird geworfen. Falls 1, 2 oder 3 Augen erscheinen, wird Urne 1 ausgewählt, bei Ausgang 4 wird Urne 2 gewählt und bei 5 oder 6 wird Urne 3 gewählt. Nun wird aus der ausgewählten Urne eine Murmel genommen.

a) Sei A das Ereignis, daß die gezogene Murmel weiß ist. Bestimmen Sie $\Pr[A]$.

b) Sei Y das Ereignis, daß Urne 2 gewählt wurde. Bestimmen Sie $\Pr[Y|A]$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

U sei in $(-1, 1)$ gleichverteilt.

Das Intervall $[-1, 1]$ werde durch U in zwei Teile geteilt. Man bestimme den Erwartungswert für die Länge des größeren Teilintervalls.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)

In einem Rechnerraum befinden sich sechs nicht vernetzte, identisch ausgestattete PC's. Erfahrungsgemäß tritt bei einem einzelnen PC mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% in einem Zeitraum von 24 Stunden kein Systemabsturz ein.

Im weiteren nehme man an, daß die Zahl der Systemabstürze pro Rechner innerhalb von 24 Stunden durch eine Poisson-verteilte Zufallsvariable beschrieben werden kann.

a) Bestimmen Sie den Parameter dieser Poisson-Verteilung.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb von 24 Stunden jeder Rechner mindestens einmal abstürzt.

Aufgabe 5 (2+1+2+2 Punkte)

In einem Modell für einen Lernprozeß bei Ratten hat das Nagetier den sog. Zustand 1 erreicht, wenn es einen bestimmten Trick gelernt hat; es ist im Zustand 2, wenn es den Trick noch nicht beherrscht. Man nimmt an, daß es seine Kunstfertigkeit behält, wenn es sie einmal erworben hat, während es bei jedem Einzelversuch (unabhängig von allen früheren Versuchen) eine Wahrscheinlichkeit $\alpha > 0$ hat, den Trick zu erlernen, falls es diesen noch nicht beherrscht.

a) Formulieren Sie den Lernprozeß als Markov-Kette, geben Sie das Übergangsdiagramm und die Übergangsmatrix an.

b) Ist die Markov-Kette irreduzibel? Begründung!

c) Bestimmen Sie eine stationäre Verteilung. Ist diese eindeutig?

d) Berechnen Sie h_{21}. (Zur Erinnerung: h_{ij} bezeichnet die erwartete Anzahl Schritte für einen Übergang vom Zustand i in den Zustand j.)

Aufgabe 6 (3+3 Punkte)

Nach einem Tag intensiver Prüfungsvorbereitungen für die Klausur zu *Diskrete Strukturen II* gehen Sie am Abend noch schnell in einen Supermarkt. Dieser habe insgesamt 3 Kassen. Für alle Kassen gibt es eine *gemeinsame* Warteschlange.

Wir nehmen an, daß die Kunden exponential-verteilt mit Parameter λ ankommen und die Bedienzeiten an den Kassen unabhängig exponentialverteilt mit Parameter μ sind.

Von den drei Kassen ist immer mindestens eine geöffnet. Eine zweite Kasse wird geöffnet, sobald mindestens 3 Kunden warten. Die dritte Kasse wird geöffnet, sobald mindestens 5 Kunden warten.

Wenn immer ein Kunde bezahlt hat, schließt der Kassierer genau dann seine Kasse (und macht Pause),

wenn derzeit drei Kassen geöffnet sind und höchstens 4 Kunden warten

oder

wenn derzeit zwei Kassen geöffnet sind und höchstens 2 Kunden warten.

a) Formulieren Sie diese Situation als Birth-and-Death Prozeß.
TIP: Die Zustände entsprechen genau den Anzahl Kunden im Supermarkt (d.h. der Anzahl Kunden in der Warteschlange plus der Anzahl Kunden an den Kassen).

b) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung für den Fall $\lambda = \mu = 1$.

HINWEIS: Unter den *wartenden* Kunden verstehen wir die Kunden, die in der Warteschlange auf die Bedienung an einer Kasse warten.

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Es sei eine mit unbekanntem Parameter p geometrisch verteilte Grundgesamtheit gegeben.

Wie lautet der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{p}$ für eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$? Begründung!

Aufgabe 8 (2+2 Punkte)

Die Laufzeit L (in Sekunden) eines Programms auf einer Workstation werde als $\mathcal{N}(\mu, 36)$-verteilt angenommen, mit unbekanntem $\mu \in \mathbb{R}^+$.

a) Wie groß darf das Stichprobenmittel $\bar{l}$ aus 100 unabhängig voneinander ermittelten Meßwerten $l_1, \ldots, l_{100}$ höchstens sein, damit die Nullhypothese

$$H_0 : \quad \mu \leq 24.5$$

auf einem Testniveau von 6% nicht verworfen wird?

b) Wie klein muß das Testniveau α mindestens sein, sodaß die Nullhypothese aus a) für ein beobachtetes Stichprobenmittel von $\bar{l} = 25.628$ nicht verworfen wird?

HINWEIS: Benutzen Sie die folgende Tabelle der Quantile der Standardnormalverteilung:

$z_{0.90} = 1.28$
$z_{0.91} = 1.34$
$z_{0.92} = 1.40$
$z_{0.93} = 1.48$
$z_{0.94} = 1.55$
$z_{0.95} = 1.64$
$z_{0.96} = 1.75$
$z_{0.97} = 1.88$
$z_{0.98} = 2.05$
$z_{0.99} = 2.33$