Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

SS 1998
Lösungen zur Semestralklausur
29. Juli 1998

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1 (2+3 Punkte)

Fünf Würfel werden gleichzeitig geworfen. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz für die Summe der Augenzahlen.

Es geht hier um die Summe von fünf unabhängigen und gleichverteilten Zufallsvariablen

$$X := \sum_{i=1}^{5} X_i.$$

Der Erwartungswert eines beliebigen Summanden X_i ist

$$\mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

Wegen der Linearität des Erwartungswerts folgt $\mathbb{E}[X] = 5 \cdot 7/2 = 35/2 = 17.5$.

Die Varianz von X_i ist gegeben durch

$$\mathrm{Var}[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 = \sum_{i=1}^{6} i^2 \cdot \frac{1}{6} - \frac{49}{4} = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

Weil sich bei der Summe unabhängiger Zufallsvariablen die Varianzen der Summanden addieren, ist $\mathrm{Var}[X] = 5 \cdot 35/12 = 175/12 = 14.58\bar{3}$.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)

Gegeben seien drei Urnen:
Urne 1 enthält eine weiße und eine schwarze Murmel, Urne 2 eine schwarze und vier weiße Murmeln und Urne 3 enthält je drei weiße und schwarze Murmeln. Ein Würfel wird geworfen. Falls 1, 2 oder 3 Augen erscheinen, wird Urne 1 ausgewählt, bei Ausgang 4 wird Urne 2 gewählt und bei 5 oder 6 wird Urne 3 gewählt. Nun wird aus der ausgewählten Urne eine Murmel genommen.

a) Sei A das Ereignis, daß die gezogene Murmel weiß ist. Bestimmen Sie $\Pr[A]$.

Wir verwenden die Formel von Bayes und bedingen jeweils darauf, daß Urne 1, 2 bzw. 3 ausgewählt wurde. Hierbei bezeichne E_i das Ereignis, daß Urne i ausgewählt wurde:

$$\begin{aligned}\Pr[A] &= \Pr[E_1]\Pr[A|E_1] + \Pr[E_2]\Pr[A|E_2] + \Pr[E_3]\Pr[A|E_3] \\ &= \frac{1}{2}\Pr[A|E_1] + \frac{1}{6}\Pr[A|E_2] + \frac{2}{6}\Pr[A|E_3] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{11}{20} = 0.55.\end{aligned}$$

b) Sei Y das Ereignis, daß Urne 2 gewählt wurde. Bestimmen Sie $\Pr[Y|A]$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\Pr[Y|A] &= \frac{\Pr[Y\cap A]}{\Pr[A]} = \frac{\Pr[Y\cap A]}{\Pr[Y]}\frac{\Pr[Y]}{\Pr[A]} = \Pr[A|Y]\frac{\Pr[Y]}{\Pr[A]} \\ &= 4/5\cdot\frac{1/6}{11/20} = 8/33 = 0.\bar{24}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

U sei in $(-1,1)$ gleichverteilt.

Das Intervall $[-1,1]$ werde durch U in zwei Teile geteilt. Man bestimme den Erwartungswert für die Länge des größeren Teilintervalls.

Betrachte die Funktion $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, die jedem u den Wert des längsten Teilintervalls zuordnet. Offensichtlich ist $g(x) := 1+|x|$. Wir wollen den Erwartungswert der Zufallsvariable $Y := g(U)$. Nach Annahme ist die Zufallsvariable U gleichverteilt auf dem Intervall $[-1,1]$. D.h., sie hat die Dichte

$$f(x) = \begin{cases}\frac{1}{2} & -1\le x\le 1\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Damit ergibt sich

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+|x|)\,dx = 3/2.$$

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)

In einem Rechnerraum befinden sich sechs nicht vernetzte, identisch ausgestattete PC's. Erfahrungsgemäß tritt bei einem einzelnen PC mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% in einem Zeitraum von 24 Stunden kein Systemabsturz ein.

Im weiteren nehme man an, daß die Zahl der Systemabstürze pro Rechner innerhalb von 24 Stunden durch eine Poisson-verteilte Zufallsvariable beschrieben werden kann.

a) Bestimmen Sie den Parameter dieser Poisson-Verteilung.

Sei $\mathrm{Po}_\lambda(i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$ die Poissonverteilung. Unter der Annahme, daß die Anzahl Y der Abstürze innerhalb von 24 Stunden Poissonverteilt ist, gilt

$$3/4 = \Pr[Y=0] = \mathrm{Po}_\lambda(0) = e^{-\lambda}.$$

Es folgt $\lambda = \ln 4/3 = 0.287...$

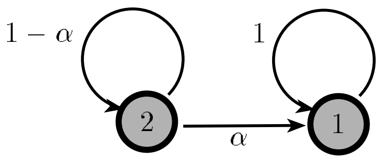
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb von 24 Stunden jeder Rechner mindestens einmal abstürzt.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Recher abstürzt, ist offenbar 1/4. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, daß Rechner 1 abstürzt, und Rechner 2 abstürzt, usw., die einzelnen Ereignisse sind unabhängig. Deshalb ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $(1/4)^6 = 2^{-12}$.

Aufgabe 5 (2+1+2+2 Punkte)

In einem Modell für einen Lernprozeß bei Ratten hat das Nagetier den sog. Zustand 1 erreicht, wenn es einen bestimmten Trick gelernt hat; es ist im Zustand 2, wenn es den Trick noch nicht beherrscht. Man nimmt an, daß es seine Kunstfertigkeit behält, wenn es sie einmal erworben hat, während es bei jedem Einzelversuch (unabhängig von allen früheren Versuchen) eine Wahrscheinlichkeit $\alpha > 0$ hat, den Trick zu erlernen, falls es diesen noch nicht beherrscht.

a) Formulieren Sie den Lernprozeß als Markov-Kette, geben Sie das Übergangsdiagramm und die Übergangsmatrix an.



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

b) Ist die Markov-Kette irreduzibel? Begründung!

Nein, denn der Graph des Überdiagramms ist nicht (stark) zusammenhängend. Wenn man im Zustand 1 beginnt, bleibt man dort.

c) Bestimmen Sie eine stationäre Verteilung. Ist diese eindeutig?

Die Verteilung $(1, 0)$ ist offensichtlich invariant. Sie ist eindeutig ($\alpha \neq 0$), denn aus

$$(x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} = (x, y)$$

folgt $y = 0$. Wenn $\alpha = 0$, ist natürlich jede Verteilung invariant.

d) Berechnen Sie h_{21}. (Zur Erinnerung: h_{ij} bezeichnet die erwartete Anzahl Schritte für einen Übergang vom Zustand i in den Zustand j.)

Die Wahrscheinlichkeit, daß man in genau $k > 1$ Schritten von 1 nach 2 kommt, ist $\alpha(1-\alpha)^{k-1}$ daraus folgt für die erwartete Hitting–Time h_{21}:

$$h_{12} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \alpha(1-\alpha)^{k-1}.$$

Dies ist genau der Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen mit Erfolgswahrscheinlichkeit α. Dieser ist (vgl. Vorlesung) $1/\alpha$. Man kann h_{21} aber auch wie folgt berechnen: Die Summe ist bis auf den Faktor α genau die Ableitung einer geometrischen Reihe. D.h., es gilt

$$\begin{aligned} h_{12} &= \alpha[\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} x^k]_{x=1-\alpha} \\ &= \alpha[\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}]_{x=1-\alpha} \\ &= \alpha[\frac{1}{(1-x)^2}]_{x=1-\alpha} = \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (3+3 Punkte)

Nach einem Tag intensiver Prüfungsvorbereitungen für die Klausur zu *Diskrete Strukturen II* gehen Sie am Abend noch schnell in einen Supermarkt. Dieser habe insgesamt 3 Kassen. Für alle Kassen gibt es eine *gemeinsame* Warteschlange.

Wir nehmen an, daß die Kunden exponential-verteilt mit Parameter λ ankommen und die Bedienzeiten an den Kassen unabhängig exponentialverteilt mit Parameter μ sind.

Von den drei Kassen ist immer mindestens eine geöffnet. Eine zweite Kasse wird geöffnet, sobald mindestens 3 Kunden warten. Die dritte Kasse wird geöffnet, sobald mindestens 5 Kunden warten.

Wenn immer ein Kunde bezahlt hat, schließt der Kassierer genau dann seine Kasse (und macht Pause),

wenn derzeit drei Kassen geöffnet sind und höchstens 4 Kunden warten

oder

wenn derzeit zwei Kassen geöffnet sind und höchstens 2 Kunden warten.

a) Formulieren Sie diese Situation als Birth-and-Death Prozeß.
TIP: Die Zustände entsprechen genau den Anzahl Kunden im Supermarkt (d.h. der Anzahl Kunden in der Warteschlange plus der Anzahl Kunden an den Kassen).

Wir überlegen zuerst, wieviele jeweils bedient werden, wenn k Kunden insgesamt im Laden sind.

$k = 1$: Einer wird bedient (Rate μ).

$k = 2$: Einer wird bedient, und einer wartet, also eine Kasse (Rate μ).

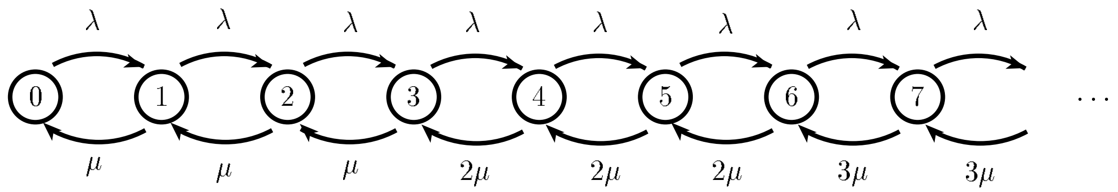
$k = 3$: Einer wird bedient, und zwei warten, also eine Kasse (Rate μ).

$k = 4$: Zwei werden bedient, und zwei warten, also zwei Kassen (Rate 2μ).

$k = 5$: Zwei werden bedient, und drei warten, also zwei Kassen (Rate 2μ).

$k = 6$: Zwei werden bedient, und vier warten, also zwei Kassen (Rate 2μ).

$k > 6$: k werden bedient, und $k - 3$ warten, also drei Kassen (Rate 3μ).



b) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung für den Fall $\lambda = \mu = 1$.

Aus der Vorlesung wissen wir:

$$\begin{aligned} \pi_k &= \pi_0 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, \qquad \text{wobei} \\ \pi_0 &= \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Wie berechnen zunächst $\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$ für alle $k \geq 1$.

Für $k = 1, 2, \ldots, 7$ erhält man die Werte

$$1, 1, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/24.$$

Für $k \geq 6$ gilt allgemein die Formel $1/8 \cdot 1/3^{k-6}$.

Für π_0 ergibt sich daher (wieder geometrische Reihe anwenden)

$$\pi_0 = \left(4.75 + \frac{1}{8} \cdot \sum_{k=6}^{\infty} 1/3^{k-6}\right)^{-1} = \left(4.75 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)^{-1} = 16/79 = 0.2025...$$

Die Werte für π_k, $k \geq 1$ erhält man daraus sofort durch Einsetzen in obige Formel.

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Es sei eine mit unbekanntem Parameter p geometrisch verteilte Grundgesamtheit gegeben.

Wie lautet der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{p}$ für eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$? Begründung!

Die geometrische Verteilung mit Parameter p ist

$$\mathrm{Geo}_p(x) = p(1-p)^{x-1} \text{ für } x \in \mathbb{N}.$$

Die Likelihood Funktion für den Stichprobenvektor $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ist also

$$L(\vec{x}, p) := \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i - 1} = p^n \cdot (1-p)^{n(\bar{x}-1)}.$$

Nullsetzen der Ableitung ergibt:

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dp} L(\vec{x}, p) &= np^{n-1} \cdot (1-p)^{n(\bar{x}-1)} - p^n \cdot n(\bar{x}-1)(1-p)^{n(\bar{x}-1)-1} \\ &= p^{n-1}(1-p)^{n(\bar{x}-1)-1} \cdot (n(1-p) - n(\bar{x}-1)p) \\ &= p^{n-1}(1-p)^{n(\bar{x}-1)-1} \cdot n(1-p\bar{x}). \end{aligned}$$

Als Maximum-Likelihood-Schätzer erhält man daher $\hat{p} = 1/\bar{x}$.

Aufgabe 8 (2+2 Punkte)

Die Laufzeit L (in Sekunden) eines Programms auf einer Workstation werde als $\mathcal{N}(\mu, 36)$-verteilt angenommen, mit unbekanntem $\mu \in \mathbb{R}^+$.

a) Wie groß darf das Stichprobenmittel $\bar{l}$ aus 100 unabhängig voneinander ermittelten Meßwerten $l_1, \ldots, l_{100}$ höchstens sein, damit die Nullhypothese

$$H_0: \quad \mu \leq 24.5$$

auf einem Testniveau von 6% nicht verworfen wird?

Nach Annahme ist die Laufzeit L normalverteilt mit bekannter Varianz. Zu verwenden ist daher der Gauß-Test. Als Testgröße wird dort $T(\vec{L}) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{L} - \mu_0)$ verwendet, der Ablehnungsbereich zum Signifikanzniveau α ist $K = \{\vec{l} \mid T(\vec{l}) > z_{1-\alpha}\}$. In unserem Fall ist $n = 100$, $\sigma = 6$, $\mu_0 = 24.5$ und $\alpha = 0.06$. D.h., die Nullhypothese wird genau dann akzeptiert, wenn

$$\frac{10}{6}(\bar{l} - 24.5) \leq z_{0.94} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \bar{l} < \frac{6}{10} z_{0.94} + 24.5 = 25.43.$$

b) Wie klein muß das Testniveau α mindestens sein, sodaß die Nullhypothese aus a) für ein beobachtetes Stichprobenmittel von $\bar{l} = 25.628$ nicht verworfen wird?

Die Nullhypothese wird genau dann nicht verworfen, wenn

$$\frac{10}{6}(\bar{l} - 24.5) \leq z_{1-\alpha}.$$

Für $\bar{l} = 25.628$ ergibt sich daher, daß die Nullhypothese genau für diejenigen α nicht verworfen wird, für die

$$z_{1-\alpha} \geq \frac{10}{6}(25.628 - 24.5) = 1.88.$$

Aus der untenstehenden Tabelle ergibt sich daher $\alpha \leq 0.03$.

Hinweis: Benutzen Sie die folgende Tabelle der Quantile der Standardnormalverteilung:

$z_{0.90} = 1.28$
$z_{0.91} = 1.34$
$z_{0.92} = 1.40$
$z_{0.93} = 1.48$
$z_{0.94} = 1.55$
$z_{0.95} = 1.64$
$z_{0.96} = 1.75$
$z_{0.97} = 1.88$
$z_{0.98} = 2.05$
$z_{0.99} = 2.33$