Bsp. Ein Beispiel aus dem Alltag

Szenario:

In der Verwaltung einer großen Universität sollen die Immatrikulationsunterlagen (Semesterbögen) für n Studenten verschickt werden. Diese sind bereits gedruckt. Auch n Umschläge wurden schon mit den Anschriften der Studenten versehen. Beim „Eintüten“ passiert allerdings ein kleines Malheur. Der zuständige Mitarbeiter leidet unter einem Hitzschlag und nimmt die Zuordnung vor ohne auf die Namen zu achten. (D.h., jede der Zuordnungen von Semesterbögen zu Umschlägen sei gleich wahrscheinlich).

Frage:

Wieviele Studenten erhalten im Mittel ihren eigenen Bogen?

Lösung:

Wir bezeichnen mit X die Anzahl der Studenten, die ihren eigenen Bogen erhalten. Dann definieren wir geeignete 0-1 Zufallsvariable X_i so daß gilt $X = X_1 + \ldots + X_n$ und nutzen die Linearität des Erwartungswertes aus.

Genauer: Setze

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{falls Student } i \text{ seinen eigenen Bogen erhält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$X := X_1 + \ldots + X_n$$

und

$$\Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n}$$

(da alle Zuordnungen gleichwahrscheinlich sind)

Daraus folgt

$$\mathbb{E}[X_i] = 0 \cdot \Pr[X_i = 0] \ + \ 1 \cdot \Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n}$$

und somit

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$