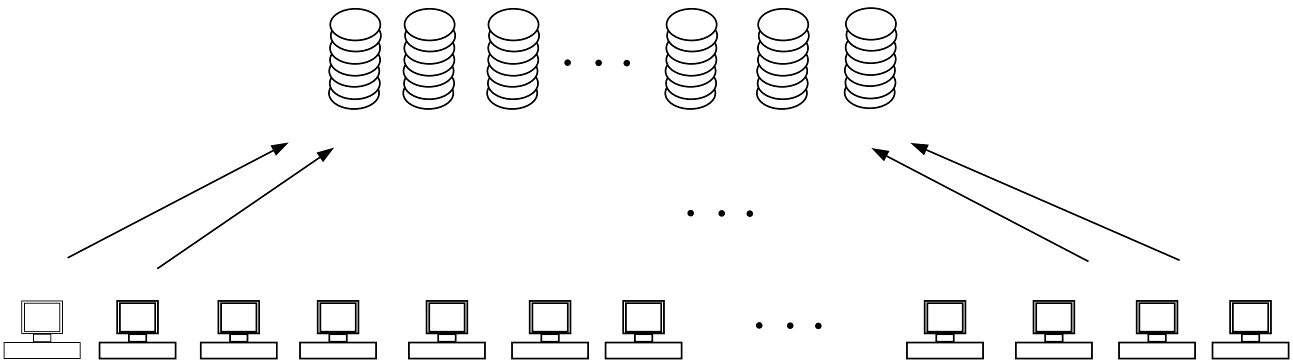
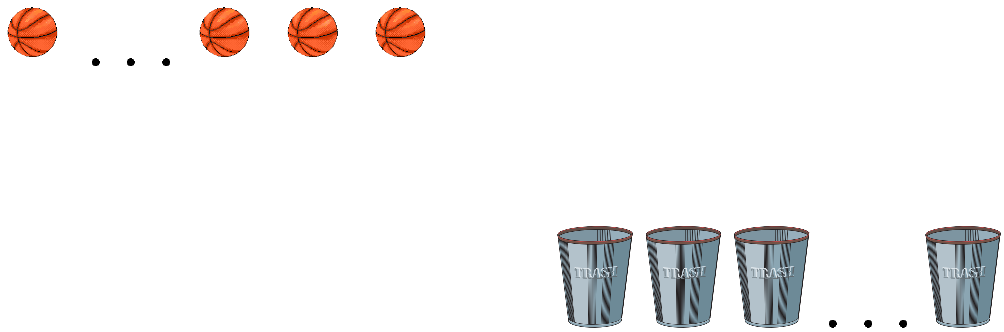
Bsp.: Fallbeispiel 1: Zuordnung von Datenbankanfragen

Szenario:



Aufgabe: Entwerfe ein möglichst einfaches Verfahren, das jede Anfrage genau einem Server zuordnet — und zwar so, daß alle Server möglichst gleich viel Arbeit erhalten.

Idealisiertes Modell: Wir werfen n Bälle *zufällig* in m Urnen.



$X_i :=$ Anzahl Bälle in $i$ter Urne

Frage: Wie groß ist $\max\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$?

[Wir betrachten im folgenden nur den Fall $n = m$.]

$X_i :=$ Anzahl Bälle in $i$ter Urne

Frage: Wie groß ist $\max\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$?

Antwort: Mit hoher Wahrscheinlichkeit etwa $\dfrac{\ln n}{\ln \ln n}$.

Beweisidee: Wir zeigen

$$\Pr[\max_{1 \leq i \leq n} X_i \geq \alpha \frac{\ln n}{\ln \ln n}] = \begin{cases} o(1) & \text{, falls } \alpha > 1 \\ 1 - o(1) & \text{, falls } \alpha < 1. \end{cases}$$

Setze

$$Y_i := \begin{cases} 1 & \text{, falls } X_i \geq \alpha \frac{\ln n}{\ln \ln n} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Dann gilt für $Y := \sum_{i=1}^{n} Y_i$:

$$Y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \max_{1 \leq i \leq n} X_i < \alpha \frac{\ln n}{\ln \ln n}$$

Markov-Ungleichung: $\Pr[Y \geq 1] \leq \mathbb{E}[Y]$

Chebychev-Ungleichung: $\Pr[Y = 0] \leq \dfrac{\mathrm{Var}[Y]}{(\mathbb{E}[Y])^2}$

Etwas Rechnung (weggelassen):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &\approx n^{1-\alpha} \\ \mathrm{Var}[Y] &\approx \mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \Pr[\max_{1\le i\le n} X_i \ge \alpha\frac{\ln n}{\ln\ln n}] &= \Pr[Y \ge 1] \le \mathbb{E}[Y] \\ &= o(1), \qquad \text{falls } \alpha > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr[\max_{1\le i\le n} X_i < \alpha\frac{\ln n}{\ln\ln n}] &= \Pr[Y = 0] \\ &\le \frac{\mathrm{Var}[Y]}{(\mathbb{E}[Y])^2} \\ &\approx \frac{1}{\mathbb{E}[Y]} \\ &= o(1), \qquad \text{falls } \alpha < 1 \end{aligned}$$