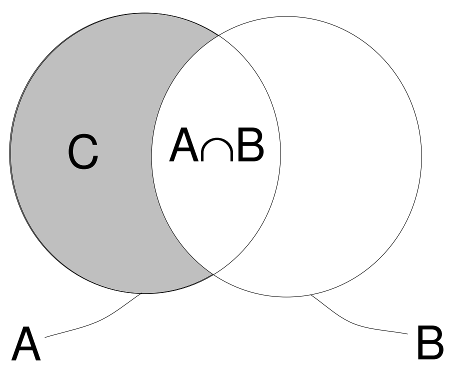
Satz (Siebformel): Für beliebige Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gilt:

$$\begin{aligned}\Pr[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] \;=\; & \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] \\ & + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}] \\ & - + \ldots + (-1)^{n-1} \Pr[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n]\end{aligned}$$

Beweisidee: Prinzip der Inklusion und Exklusion

Beweis ($n = 2$):
Setze $A := A_1$, $B := A_2$ und $C := A \setminus (A \cap B)$.



Dann sind C und $A \cap B$ disjunkt und analog C und B.
Nach dem Additionssatz (Rechenregel 5) gilt daher:

$$\Pr[\underbrace{C \cup (A \cap B)}_{=A}] \;=\; \Pr[C] + \Pr[A \cap B] \qquad \text{und}$$

$$\begin{aligned}\Pr[\underbrace{C \cup B}_{=A\cup B}] \;&=\; \Pr[C] + \Pr[B] \\ &=\; \Pr[A] - \Pr[A \cap B] + \Pr[B].\end{aligned}$$

Bsp.: „Poker“

Vereinfachte Version: 2 Spieler, kein Kartentausch

Spieler A: besitzt 4 Asse und Herz 2

Frage: Mit welcher W'keit verliert Spieler A?

Spielregeln: Spieler A verliert genau dann, wenn Spieler B einen Straight Flush hat.

Also:

$$\begin{aligned}
&\Pr[\text{„}A\text{ verliert“}] \\
&= \Pr[\text{„}B\text{ hat Straight Flush“}] \\
&= \frac{\#\text{Mögl. für Straight Flush}}{\text{Größe des W'raumes}} \qquad [\to \text{ Prinzip von Laplace}] \\
&= \frac{3 \cdot 8 + 7}{\binom{52-5}{5}} = 1.19 \cdot 10^{-5}
\end{aligned}$$

Verändertes Szenario:

A hat Karten gezinkt und kann daher erkennen, daß B nur Kreuz hat

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
&\Pr[\text{„}A\text{ verliert“}] \\
&= \frac{\#\text{Mögl. für Straight Flush}}{\text{Größe des W'raumes}} \\
&= \frac{8}{\binom{12}{5}} \approx 0.01
\end{aligned}$$

Bsp.: „Zweimaliges Würfeln mit einem idealen Würfel“

$\rightsquigarrow\ \Omega = \{(i,j) \mid 1 \le i,j \le n\}$

(i,j) := Elementarereignis, daß im ersten Wurf die Zahl i und im zweiten Wurf die Zahl j gewürfelt wird

Laplace-Prinzip: $\Pr[(i,j)] = \frac{1}{36} \quad \forall i,j$

Ereignisse:

$A :=$ Augenzahl im ersten Wurf ist gerade

$B :=$ Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade

$C :=$ Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7

Dann gilt $\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}$ und $\Pr[C] = \frac{1}{6}$.

Wie groß ist $\Pr[A|B]$?

Intuition: $\Pr[A|B] = \Pr[A] = \frac{1}{2}$ ....

Nachrechnen:

$$\begin{aligned} A \cap B \quad = \quad & \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4), \\ & (4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\} \end{aligned}$$

und also

$$\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \Pr[A]$$