Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

SS 1998
Übungsblatt 3
22. Mai 1998

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1

Die aus der Vorlesung bekannte Markov-Ungleichung (MU) lautet

$$\Pr\left(X \geq t \cdot \mathrm{E}\left[X\right]\right) \leq \frac{1}{t}$$

für $t > 0$. Sei nun gegeben eine positive ganze Zahl t. Beschreiben Sie eine nur nichtnegative Werte annehmende Zufallsvariable X, für die gilt

$$\Pr\left(X \geq t \cdot \mathrm{E}\left[X\right]\right) = \frac{1}{t},$$

d.h. für die die MU "scharf" ist.

Aufgabe 2

In der Literatur existieren weitere (schärfere) Ungleichungen. Eine sehr bekannte davon ist die Chernov-Ungleichung. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\Pr\left(X_i = 1\right) = p$ und $\Pr\left(X_i = 0\right) = 1 - p$. Dann gilt für $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ und beliebiges $\delta > 0$:

$$\Pr\left(X > (1+\delta)\mathrm{E}\left[X\right]\right) < \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{(1+\delta)}}\right)^{\mathrm{E}\left[X\right]}$$

Benutzen Sie zum Lösen der folgenden Aufgaben die Chernov-Ungleichung.

- Eine Fußballmanschaft gewinnt jedes Spiel mit Wahrscheinlichkeit 1/3. Wir nehmen an, daß die Spielausgänge untereinander unabhängig sind. Bestimmen Sie eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, daß die Mannschaft von n Spielen mehr als die Hälfte gewinnt.
- Nach einer erfolglosen Saison wechselt die Mannschaft den Trainer. Experten schätzen die Siegwahrscheinlichkeit pro Spiel jetzt auf 3/4. Wie hoch ist jetzt wie Wahrscheinlichkeit, daß von n Spielen mehr als die Hälfte verloren wird?