Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1998
Übungsblatt 2
14. Mai 1998

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

(Abgabetermin: Donnerstag, den 21. Mai 1998, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Sei G ein gewichteter ungerichteter Graph. Zeigen Sie:

> Sei M ein Matching in G mit k Kanten und unter all solchen Matchings eines mit maximalem Gewicht (ein maximales k-Matching). Dann gibt es ein maximales $(k+1)$-Matching, das sich durch Augmentieren entlang eines schwersten (bzgl. der alternierenden Summe) augmentierenden Pfades ergibt.

Aufgabe 2

(i) Sei G ein ungerichteter bipartiter Graph mit reellen Kantengewichten. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der ein Matching maximaler Kardinalität mit maximalem Gewicht bestimmt.
(ii) Sei G ein ungerichteter bipartiter Graph mit reellen Kantengewichten. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der ein Matching maximalen Gewichts bestimmt.

Aufgabe 3

(i) Für einen Graphen G bezeichne $\mathcal{C}_G$ die Menge seiner (Zusammenhangs-)Komponenten, und $q(G)$ die Anzahl der Komponenten ungerader Ordnung.

> **Satz** (Tutte 1947): Ein Graph $G = (V, E)$ hat genau dann ein perfektes Matching, wenn $q(G \setminus S) \leq |S|$ für alle $S \subseteq V$ gilt.

Zeigen Sie, daß die Bedingung des Satzes notwendig für die Existenz eines perfekten Matchings ist.

↷ **Bitte wenden!** ↷

(ii) Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *faktorkritisch*, wenn $V \neq \emptyset$ und $G \setminus \{v\}$ für jedes $v \in V$ ein perfektes Matching hat. Eine Knotenmenge $S \subseteq V$ heißt *paarbar nach* $G \setminus S$, wenn der Graph H_S, der aus G durch Kontraktion der Komponenten in $\mathcal{C}_{G \setminus S}$ und Löschen aller Kanten innerhalb von S entsteht, ein Matching der Kardinalität $|S|$ enthält.

> **Satz**: Jeder Graph $G = (V, E)$ enthält eine Knotenmenge S mit den folgenden beiden Eigenschaften:
>
> (a) S ist paarbar nach $G \setminus S$.
>
> (b) Jede Komponente von $G \setminus S$ ist faktorkritisch.
>
> Für jedes solche S enthält G genau dann ein perfektes Matching, wenn $|S| = |\mathcal{C}_{G \setminus S}|$ ist.

Zeigen Sie, daß aus diesem Satz der Satz von Tutte folgt.

Aufgabe 4

Beweisen Sie den Satz aus Aufgabe 3(ii).
Hinweis: Um die Existenz von S zu zeigen, ist es hilfreich, S folgendermaßen zu wählen: Sei $|V| > 0$ und $d \geq 0$ minimal mit der folgenden Eigenschaft:

$$q(G \setminus T) \leq |T| + d \qquad \text{für jedes } T \subseteq V.$$

Dann gibt es ein T, für das in obiger Ungleichung Gleichheit gilt. Dies folgt aus der Minimalwahl von d, falls $d > 0$ ist, und aus $q(G \setminus \emptyset) \geq |\emptyset| + 0$, falls $d = 0$ ist. Man wähle S nun als ein solches T maximaler Mächtigkeit.