Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1998
Übungsblatt 4
4. Juni 1998

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

(Abgabetermin: Montag, den 15. Juni 1998, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Sei $G = (V, E)$ ein 0-1-Netzwerk vom Typ 2 mit Kapazitätsfunktion $c : E \to \mathbb{R}^+$ und Flußfunktion $f : E \to \mathbb{R}^+$. Sei weiterhin M der Wert eines maximalen Flusses für (G, c). Dann ist die Länge l des geschichteten Netzwerks für (G, c) und $f \equiv 0$

$$\leq \frac{|V| - 2}{M} + 1.$$

Aufgabe 2

Sei $G = (V, E)$ ein Netzwerk mit Kapazitätsfunktion $c : E \to \mathbb{R}^+$, Flußfunktion $f : E \to \mathbb{R}^+$ und unterer Schranke für den Fluß $b : E \to \mathbb{R}^+$. Die Kapazität eines Schnittes $(S, \bar{S})$ von G sei definiert als

$$C_{S,\bar{S}} := \sum_{e \in E_{S,\bar{S}}} c(e) - \sum_{e \in E_{\bar{S},S}} b(e).$$

Zeigen Sie, daß mit dieser Definition das "Max-Flow-Min-Cut" Theorem gilt.

Aufgabe 3

Ein Krankenhaus mit 3 Abteilungen benötigt für 3 Schichten pro Tag eine jeweils unterschiedliche Besetzung der Abteilungen mit Pflegepersonal. Die Verwaltung des Krankenhauses möchte aus Kostengründen die minimale Anzahl von Pflegekräften berechnen, so daß folgende Anforderungen erfüllt werden:

1. In allen 3 Schichten zusammen müssen insgesamt mindestens
   (a) 13 Pflegekräfte in Abteilung 1
   (b) 32 Pflegekräfte in Abteilung 2
   (c) 22 Pflegekräfte in Abteilung 3

   eingeteilt werden.

↷ **Bitte wenden!** ↷

2. In allen 3 Abteilungen zusammen müssen insgesamt mindestens
   (a) 26 Pflegekräfte in Schicht 1
   (b) 24 Pflegekräfte in Schicht 2
   (c) 19 Pflegekräfte in Schicht 3

   eingeteilt werden.

3. Die minimale und maximale Anzahl von Pflegekräften, die in jeder Abteilung in einer bestimmten Schicht eingeteilt werden, unterliegt folgenden Beschränkungen:

	Abteilung 1	Abteilung 2	Abteilung 3
Schicht 1	(6,8)	(11,12)	(7,12)
Schicht 2	(4,6)	(11,12)	(7,12)
Schicht 3	(2,4)	(10,12)	(5,7)

Geben Sie ein Verfahren zur Lösung dieser Problemstellung an, das auf Algorithmen zur Berechnung maximaler Flüsse basiert.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch? Rechtfertigen Sie Ihre Antworten, indem Sie entweder einen Beweis geben oder aber ein Gegenbeispiel konstruieren.

1. Ist f ein maximaler Fluß, so gilt entweder $f(e) = 0$ oder $f(e) = c(e)$ für jede Kante $e \in E$ eines Netzwerkes $G = (V, E)$.

2. Jedes Netzwerk besitzt einen maximalen Fluß f, für den entweder $f(e) = 0$ oder $f(e) = c(e)$ für jede Kante $e \in E$ gilt.

3. Wenn alle Kanten eines Netzwerkes paarweise verschiedene Kapazitäten haben, so gibt es einen eindeutig bestimmten minimalen Schnitt.

4. Wenn man in einem Netzwerk jede gerichtete Kante durch eine ungerichtete Kante ersetzt, so bleibt der Wert eines maximalen Flusses unverändert.

5. Wenn man jede Kantenkapazität mit einer positiven Zahl λ multipliziert, so bleibt der Wert eines minimalen Schnittes unverändert.

6. Wenn man zu jeder Kantenkapazität eine positive Zahl λ addiert, so bleibt der Wert eines minimalen Schnittes unverändert.