Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1998
Übungsblatt 7
2. Juli 1998

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

(Abgabetermin: Donnerstag, den 9. Juli 1998, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Stellen Sie das durch folgendes System linearer Ungleichungen beschriebene Polyeder als Minkowski-Summe eines Polytops und eines polyedrischen Kegels dar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit Zeilen $a_1, \dots, a_m$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $x, w^T \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß das Farkas-Lemma äquivalent zu folgender Aussage ist:

> Wenn die linearen Ungleichungen $a_1 x \leq 0, \dots, a_m x \leq 0$ die lineare Ungleichung $wx \leq 0$ implizieren, dann ist w eine nichtnegative Linearkombination der $a_1, \dots, a_m$ und umgekehrt.

Aufgabe 3

Zeigen Sie folgende Form des Dualitätssatzes für die Lineare Programmierung:

$$\max\{cx \mid x \geq 0, Ax = b\} = \min\{yb \mid yA \geq c\}$$

unter der Voraussetzung, daß beide Mengen nicht leer sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 4

Seien

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, (d, e, f)$$

eine Matrix, ein Spalten- bzw. ein Zeilenvektor, mit Matrizen $A, B, C, D, E, F, G, H, K$, Spaltenvektoren a, b, c und Zeilenvektoren d, e, f.
Zeigen Sie, daß dann folgende allgemeine Form des Dualitätssatzes gilt:

$$\begin{aligned}
&\max\{dx + ey + fz \,|\, x \geq 0, z \leq 0, Ax + By + Cz \leq a, \\
&\qquad\qquad\qquad Dx + Ey + Fz = b, Gx + Hy + Kz \geq c\} \\
&= \\
&\min\{au + bv + cw \,|\, u \geq 0, w \leq 0, uA + vD + wG \geq d, \\
&\qquad\qquad\qquad uB + vE + wH = e, uC + vF + wK \leq f\},
\end{aligned}$$

vorausgesetzt, daß beide Mengen nicht leer sind.