Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1998
Übungsblatt 8
9. Juli 1998

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

(Abgabetermin: Donnerstag, den 16. Juli 1998, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Zeigen Sie folgenden Spezialfall des Satzes von Motzkin:

> Das System $Ax = 0$ hat eine Lösung $x > 0$ (strikte Ungleichung für jede Komponente von x) gdw. aus $yA \geq 0$ die Gleichung $yA = 0$ folgt.

Aufgabe 2

Zeigen Sie folgenden Spezialfall des Satzes von Motzkin:

> Das System $Ax = 0$ hat eine Lösung $x \geq 0$, $x \neq 0$ (strikte Ungleichung für mindestens eine Komponente von x) gdw. es **kein** y mit $yA > 0$ gibt.

Aufgabe 3

Sei A eine Matrix, b ein Spaltenvektor, c ein Zeilenvektor und sei

$$\max\{cx \mid Ax \leq b\} = \min\{yb \mid y \geq 0;\ yA = c\},$$

wobei beide Mengen nicht leer seien.
Zeigen Sie, daß für jede Ungleichung $a_i x \leq b_i$ in $Ax \leq b$ genau eine der beiden folgenden Aussagen gilt:

(I) Das Maximierungsproblem hat eine Optimallösung x_0 mit $a_i x_0 < b_i$.

(II) Das Minimierungsproblem hat eine Optimallösung y_0, deren i-te Komponente positiv ist.

↶ **Bitte wenden!** ↷

Aufgabe 4

Ist das (allgemeine) Lineare Programm

$$(*) \qquad \max\{cx \mid x \geq 0;\ Ax \leq b\}$$

gegeben, so kann man $Ax \leq b$ als $A_1 x \leq b_1$, $A_2 x \geq b_2$ mit $b_1 \geq 0$ und $b_2 > 0$ schreiben. Betrachte nun

$$(**) \qquad \max\{\mathbf{1}(A_2 x - \tilde{x}) \mid x, \tilde{x} \geq 0;\ A_1 x \leq b_1;\ A_2 x - \tilde{x} \leq b_2\},$$

wobei $\tilde{x}$ ein neuer Variablenvektor und $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ ist.
Zeigen Sie:

(i) $x = 0, \tilde{x} = 0$ ist eine Basislösung von $(**)$,

(ii) ist das Optimum von $(**)$ gleich $\mathbf{1}b_2$, so ist jede optimale Basislösung von $(**)$ eine Basislösung von $(*)$,

(iii) ist das Optimum von $(**)$ kleiner als $\mathbf{1}b_2$, so ist der zulässige Bereich von $(*)$ leer.

Bemerkung: Diese Vorgehensweise ermöglicht es, für LP Lösungsverfahren wie etwa dem Simplex-Algorithmus, die initial von einer Basislösung ausgehen, eine solche zu bestimmen.