Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1998
Übungsblatt 9
16. Juli 1998

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

(Abgabetermin: Donnerstag, den 20. August 1998, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Seien eine Matrix A und ein Spaltenvektor b mit rationalen Einträgen gegeben. Zeigen Sie, daß entweder eine Lösung des Systems $Ax \leq b$ oder ein Zertifikat für die Unlösbarkeit dieses Systems in polynomieller Zeit berechnet werden kann.

Aufgabe 2

Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rcl} \min \quad 3x_1 + x_2 + x_5 & & \\ \text{s.t. } 7x_1 + 2x_5 + x_6 & \leq & 100 \\ 6x_1 + x_2 & \leq & 200 \\ x_3 + x_4 + x_5 & = & 50 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Was ist das dazu duale Optimierungsproblem? Was die optimale Lösung?

Aufgabe 3

Seien $v_0, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$. Die konvexe Hülle von $v_0, ..., v_n$ ist die Menge der Punkte

$$\{\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Zeigen Sie, daß das Volumen der konvexen Hülle von $v_0, ..., v_n$ mindestens

$$\frac{1}{n!} \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ v_0 & v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \right|$$

beträgt. Nehmen Sie dabei den folgenden Satz zu Hilfe: Das Volumen von $P \subseteq \mathbb{R}^n$ sei μ. Betrachte die Abbildung $T(x) = t + Qx$ mit einer beliebigen $n \times n$ Matrix Q. Dann hat $T(P)$ Volumen $|\det Q|\, \mu$.

↶ **Bitte wenden!** ↷

Aufgabe 4

Sei $B_s = \mathrm{diag}\left(\frac{p^2}{(p+1)^2}, \frac{p^2}{p^2-1}, ..., \frac{p^2}{p^2-1}\right)$ eine $p \times p$ Diagonalmatrix und $m_s = \left(\frac{1}{p+1}, 0, ..., 0\right)^T$ ein p-Vektor. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß das Ellipsoid $E_s = \{x \mid (x - m_s)^T B_s^{-1}(x - m_s) \leq 1\}$ die Hemisphäre $\{x \mid x^T x \leq 1, x_1 \geq 0\}$ einschließt. Sei weiter $E = \{x \mid (x - m)^T B^{-1}(x - m) \leq 1\}$ ein beliebiges Ellipsoid mit Mittelpunkt m und $a \neq 0$ ein p-Vektor. Zeigen Sie: die affine Transformation T, die die Einheitskugel auf E und $(-1, 0, ..., 0)^T$ auf $m + \frac{Ba}{\sqrt{a^T Ba}}$ abbildet, bildet E_s auf das Ellipsoid $E' = \{x \mid (x - m')^T (B')^{-1}(x - m') \leq 1\}$ ab, wobei

$$\begin{aligned} m' &= m - \frac{1}{p+1} \frac{Ba}{\sqrt{a^T Ba}}, \\ B' &= \frac{p^2}{p^2 - 1} \left(B - \frac{2}{p+1} \frac{(Ba)(Ba)^T}{a^T Ba} \right). \end{aligned}$$