Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Dr. Michal Mnuk

SS 1998
Übungsblatt 4
10. Juni 1998

Grundlegende Algorithmen

Abgabe bis 17. Juni 1998 in der Übung

Aufgabe 10

Gegeben sei eine Folge $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ von n ganzen (also ggf. auch negativen!) Zahlen. Ein *Teilstück von* $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ *der Länge* r ist eine Teilfolge $(a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{j+r-1})$, die aus r in $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ aufeinanderfolgenden Folgengliedern besteht. Das *Gewicht* eines Teilstücks ist die Summe der darin vorkommenden Folgenglieder.

Gesucht ist ein Algorithmus, der ein Teilstück mit maximalem Gewicht findet. Da jedes Teilstück eindeutig durch Angabe von Anfang und Ende charakterisiert wird, gibt es nur $O(n^2)$ verschiedene Teilstücke beliebiger Länge. Beschreiben Sie einen besseren Algorithmus, als einfach alle Teilstücke durchzuprobieren, und beweisen Sie, daß die Worst–Case–Laufzeit in $O(n \log n)$ liegt.

TIP: Stellen Sie mit einem Divide&Conquer–Ansatz eine Rekursionsgleichung auf und verwenden Sie die in Aufgabe 12 nochmals angegebenen Lösungsformeln. Wie lange dauert es, „linksbündige“ bzw. „rechtsbündige“ Teilstücke mit maximalem Gewicht zu finden?

Aufgabe 11

Zeigen Sie, daß der Algorithmus QUICKSORT im Worst–Case $(c+1)n \log n + O(n)$ Vergleiche benötigt, wenn er einen Algorithmus als Unterprogramm benutzt, der den Median in $c \cdot n$ Vergleichen bestimmt. Hier kommt es auf die Konstanten an! Das Ergebnis bedeutet, daß die Konstante für QUICKSORT im wesentlichen durch die Konstante für die Medianbestimmung determiniert wird.

TIP: Raten Sie durch wiederholtes Einsetzen eine geschlossene Lösung der in der Vorlesung besprochenen Rekursionsgleichung für die Anzahl der Vergleiche und beweisen Sie die Gültigkeit durch Induktion.

Aufgabe 12

a) Zeigen Sie, daß bei der in der Vorlesung besprochenen In–Place–Variante von QUICKSORT, die den Median als Pivot–Element verwendet, pro Vergleich nur eine konstante Anzahl von RAM–Schritten benötigt wird. Daraus folgt dann natürlich, im Kontrast zu Aufgabe 4b), daß auch die Gesamtlaufzeit in $O(n \log n)$ liegt.

b) In der Vorlesung wurde für die Lösung der Rekursionsgleichung

$$T(n) = aT(\lceil n/b \rceil) + cn$$

gezeigt, daß $T(n) = O(n)$, falls $a < b$, $T(n) = O(n \log n)$, falls $a = b$, und $T(n) = O(n^{\log_b a})$, falls $a > b$. Geben Sie eine Wahl von a und b an, so daß die Lösung in $O(n^3)$ liegt.