Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

WS 1998/99
Semestralklausur (Lösungen)
25. Februar 1999

Diskrete Strukturen I

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Anzahl surjektiver Funktionen von $\{1,2,3,4,5,6\}$ nach $\{1,2\}$. (Die Antwort soll aus einer natürlichen Zahl bestehen. Mit Begründung!).

Lösung. Wir wählen $1 \leq k \leq 5$ Elemente aus $[6]$, die auf 1 abgebildet werden. Die restlichen Elemente werden auf 2 abgebildet. Damit gibt es

$$\sum_{i=1}^{5} \binom{6}{i} = 2^6 - 2$$

Möglichkeiten, solche Abbildungen zu konstruieren.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)

(a) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet mit 2 Symbolen. Bestimmen Sie die Anzahl der Wörter der Länge n, die über diesem Alphabet gebildet werden können und die ungerade viele a's enthalten. (Ihre Antwort soll kein Summenzeichen enthalten.)

(b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus 18 verschiedenen Buchstaben 3 (nichtleere) Wörter zu bilden?

Lösung.

(a) Sei a_n, bzw. $\bar{a}_n$, die Anzahl der Wörter der Länge n, die ungerade, bzw. gerade, Anzahl der a's enthalten. Ein Wort der Länge n mit ungerader Anzahl der a's entsteht entweder aus einem Wort der Länge $n-1$ mit ungerader Anzahl der a's durch Hinzufügen von einem b oder aus einem Wort der Länge $n-1$ mit gerader Anzahl der a's durch Hinzufügen von einem a. Damit gilt

$$a_n = a_{n-1} + \bar{a}_{n-1}.$$

Die rechte Seite zählt aber die Anzahl aller Wörter der Länge $n-1$ über einem zweielementigen Alphabet. Damit erhalten wir $a_n = 2^{n-1}$.

(b) Wir permutieren zunächst alle Buchstaben. Es ergeben sich 18! Möglichkeiten. Nun teilen wir jedes so erhaltene Wort w in 3 Teile, indem wir zwei Buchstaben auswählen. Das erste Wort besteht aus dem Anfangsstück von w und endet vor dem ersten ausgewählten Buchstaben. Das zweite Wort fängt mit dem ersten ausgewählten Buchstaben an und endet vor dem zweiten. Der Rest ergibt das dritte Wort. Der erste Buchstabe darf nicht am Anfang von w liegen (sonst wäre das erste Wort leer). Für die Auswahl gibt es also $\binom{17}{2}$ Möglichkeiten. Da die Reihenfolge der erhaltenen Wörter aber unbedeutend ist, erhalten wir jede Möglichkeit 3! Mal. Insgesamt ergibt sich die Formel

$$\frac{18!\binom{17}{2}}{3!}.$$

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

Lassen sich für alle natürlichen Zahlen n Graphen G und H mit

(a) $\chi(G) = n$

(b) $\chi'(H) = n$

finden? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Für einen Graphen G bezeichnet $\chi(G)$ die chromatische Zahl von G und $\chi'(G)$ den chromatischen Index von G.

Lösung.

(a) Wir betrachten den vollständigen Graphen K_n auf n Knoten. Sei $v \in K_n$. Keine zwei Knoten u und w in $\{v\} \cup \Gamma(v)$ können dieselbe Farbe haben, denn $\{u, w\}$ ist eine Kante in K_n. Somit müssen alle Knoten aus $v \cup \Gamma(v)$ verschiedene Farbe besitzen und folglich $\chi(G) \geq n$. Andererseits besitzt K_n nur n Knoten und damit reichen n Farben aus, d.h. $\chi(G) \leq n$. Insgesamt erhalten wir $\chi(G) = n$.

(b) Wir betrachten einen „Stern“ G mit dem mittleren Knoten vom Grad n (s. Abb. 1). Es ist klar, daß dann $\chi'(G) = n$, denn n Farben sind notwendig und, da wir nur n Kanten zu färben haben, auch hinreichend.

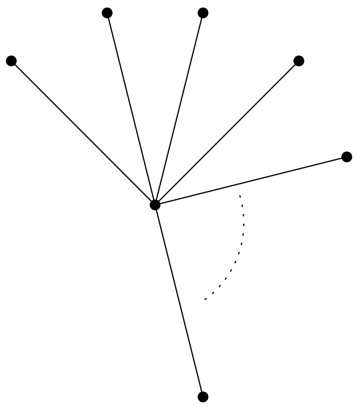

Abbildung 1:

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit mindestens 4 Knoten. Für alle $v \in V$ gelte $\deg(v) \geq 3$. Beweisen Sie: Es gibt mindestens 4 Knoten vom Grad höchstens 5.

Lösung. Angenommen, G enthält höchstens 3 Knoten $W := \{v_1, v_2, v_3\}$ vom Grad höchstens 5 (die restlichen Knoten haben Grad 6). Es gilt $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ und, da der Graph planar ist, außerdem

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Andererseits haben wir

$$\sum_{v \in V} \deg(v) \geq \deg(v_1) + \deg(v_2) + \deg(v_3) + \sum_{v \in V \setminus W} \deg(v) \geq 3 \cdot 3 + 6(|V| - 3).$$

Aus den obigen Gleichungen ergibt sich dann

$$6|V| - 9 \leq \sum_{v \in V} \deg(v) \leq 6|V| - 12$$

(Widerspruch).

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit k Komponenten. Zeigen Sie: $|E| - |V| + k \geq 0$.

Lösung. Seien $G_i = (V_i, E_i)$, $1 \leq i \leq k$, die Zusammenhangskomponenten von G. Für jedes i betrachten einen Spannbaum $T_i = (W_i, F_i)$ von G_i ($|F_i| \leq |E_i|$), der $|W_i| - 1$ Kanten enthält. Dann gilt

$$|E| = \sum_{i=1}^{k} |E_i| \geq \sum_{i=1}^{k} |F_i| = \sum_{i=1}^{k} (|W_i| - 1) = |V| - k.$$

Aufgabe 6 (2+2+4 Punkte)

Ein Tripel (a, b, c) heißt *linear*, falls $a < b < c$ und $b - a = c - b$. Mit L_n bezeichnen wir die Anzahl linearer Tripel mit $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(a) Zeigen Sie, daß $L_{2n+1} = L_{2n} + n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Leiten Sie eine ähnliche Rekursion für L_{2n}.

(c) Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für L_n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung.

(a) Wir betrachten alle linearen Tripel mit $a, b, c \in [2n+1]$ und teilen sie in zwei Klassen auf. Die erste Klasse enthält alle Tripel mit $a, b, c \in [2n]$, die zweite dann solche mit $c = 2n+1$. Die erste Klasse enthält L_{2n} Elemente, die zweite besteht aus Tripeln $(2n-2k+1, 2n-k+1, 2n+1)$ für $1 \leq k \leq n$ und enthält somit genau n Elemente. Die Formel ergibt sich unmittelbar.

(b) Analog zum obigen Fall betrachten wir alle linearen Tripel mit $a, b, c \in [2n]$, die in zwei Klassen, $a, b, c \in [2n-1]$ und $c = 2n$, aufgeteilt werden. Die erste Klasse enthält L_{2n-1} Elemente, die zweite besteht aus Tripeln $(2n - 2k, 2n - k, 2n)$ für $1 \leq k \leq n - 1$. Wir erhalten damit die Beziehung $L_{2n} = L_{2n-1} + n - 1$.

(c) Wir definieren das *Gewicht* des Tripels (a, b, c) als $c - a$ und betrachten alle linearen Tripel mit $a, b, c \in [n]$. Für eine fixe gerade Zahl $r = 2l$ gibt es $n - r$ Tripel vom Gewicht r

$$(1, \frac{r}{2} + 1, r + 1), \ldots, (n - r, n - \frac{r}{2}, n)$$

(es gibt keine linearen Tripel mit ungeradem Gewicht). Das Gewicht eines Tripels ist nun mindestens 2 und höchstens $n - 1$, falls n gerade, sonst $n - 2$. Die Anzahl aller Tripel mit $a, b, c \in [n]$ ist somit die Summe von $n - r$ über alle möglichen Gewichte r

$$A_n := \sum_{\substack{r=2 \\ r \text{ gerade}}}^{n-1} (n - r)$$

Für gerades n erhalten wir

$$A_n = \sum_{l=1}^{\frac{n-2}{2}} (n-2l) = n(\frac{n}{2}-1) - \frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1) = \frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1).$$

Für ungerades n

$$A_n = \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} (n-2l) = n\frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{2}\frac{n+1}{2} = \frac{(n-1)^2}{4}.$$

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Sei $\{f_n\}_{n\geq 0}$ eine Folge natürlicher Zahlen gegeben durch die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} f_{n+3} &= f_{n+2} + 3f_{n+1} + f_n \text{ für } n \geq 0 \\ f_0 &= f_1 = 0, \quad f_2 = 2. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die geschlossene Darstellung (d.h. eine Darstellung ohne Summenzeichen) der erzeugenden Funktion $F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$.

Lösung. Wir multiplizieren die Rekursionsgleichung mit x^{n+3} und summieren über alle $n \geq 0$. Dann ergibt sich

$$\sum_{n\geq 0} f_{n+3}x^{n+3} = x\sum_{n\geq 0} f_{n+2}x^{n+2} + 3x^2 \sum_{n\geq 0} f_{n+1}x^{n+1} + x^3 \sum_{n\geq 0} f_n x^n.$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen erhalten wir für $F = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$ die Gleichung

$$F - 2x^2 = xF + 3x^2F + x^3F.$$

Daraus ergibt sich

$$F = \frac{2x^2}{1-x-3x^2-x^3}.$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Wieviele Vergleiche benötigt der folgende Algorithmus MinMax, der gleichzeitig das Minimum und das Maximum einer Folge von $n = 2^k$ Zahlen bestimmt?

MinMax$(a_1, ..., a_n)$

```
if n = 1 then
    return (a_1, a_1)
else
    (m_1, M_1) := MinMax(a_1, ..., a_{n/2})
    (m_2, M_2) := MinMax(a_{n/2+1}, ..., a_n)
    return (min(m_1, m_2), max(M_1, M_2))
end
```

Lösung. Sei $V(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die der Algorithmus MinMax auf einer Folge der Länge n benötigt. In jedem Aufruf werden 2 Vergleiche (in der Zeile 6) durchgeführt (der Vergleich in der Zeile 1 ist qualitativ anders). Dann gilt

$$V(1) = 0$$
$$V(n) = 2V(\frac{n}{2}) + 2$$

Dann erhalten wir

$$V(n) = 2V(\frac{n}{2}) + 2 = 4V(\frac{n}{4}) + 4 + 2 = \ldots = 2^k V(1) + \sum_{i=1}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 2 = 2(n-1).$$

Man kann jedoch auch den Vergleich in der Zeile 1 mitzählen. Dann gilt

$$V(1) = 1$$
$$V(n) = 2V(\frac{n}{2}) + 3$$

und wir erhalten

$$V(n) = 2V(\frac{n}{2}) + 3 = 4V(\frac{n}{4}) + 6 + 3 = \ldots = 2^k V(1) + 3\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = n + 3(n-1) = 4n - 3.$$

Aufgabe 9 (2 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge aller zu n teilerfremden Zahlen $\mathbb{Z}_n^*$ bildet bezüglich der Multiplikation eine Gruppe. Wenn noch die übliche Addition hinzugenommen wird, bildet dann die Struktur $\langle \mathbb{Z}_n^* \cup \{0\}, +_n, \cdot_n \rangle$ einen Körper? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: $\mathbb{Z}_n^* := \{1 \leq k \leq n |\, \mathrm{ggT}(n,k) = 1\}$.

Lösung. Nach einem Satz aus der Vorlesung ist $\langle \mathbb{Z}_n^* \cup \{0\}, +_n, \cdot_n \rangle$ genau dann ein Körper, wenn n prim ist. Daß dies für zusammengesetzte Moduli nicht der Fall ist, sieht man am Beispiel $\langle \mathbb{Z}_4^* \cup \{0\}, +_4, \cdot_4 \rangle$. Dort gilt $[1] + [1] \notin \langle \mathbb{Z}_4^* \cup \{0\}, +_4, \cdot_4 \rangle$. Die additive Gruppe ist also im allgemeinen nicht abgeschlossen.

Aufgabe 10 (3 Punkte)

Für gegebene Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ sei $M_{a,b} := \{a\mu + b\nu |\, \mu, \nu \in \mathbb{Z}\}$. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $M_{a,b}$ die Zahl 1 enthält. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung. Wir zeigen

$$1 \in M_{a,b} \Longleftrightarrow \mathrm{ggT}(a,b) = 1 \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0).$$

Der Fall $a = b = 0$ ist trivial. Also sei $a \neq 0 \vee b \neq 0$.

($\Longrightarrow$) Wir nehmen an, $d := \mathrm{ggT}(a,b) > 1$. Da $1 \in M_{a,b}$ so gibt es zwei ganze Zahlen α und β mit $\alpha a + \beta b = 1$. Nun teilt aber d die Zahl $\alpha a + \beta b$ und somit auch 1 (Widerspruch).

($\Longleftarrow$) Der erweiterte Euklidische Algorithmus liefert zwei ganze Zahlen α und β mit $\alpha a + \beta b = \mathrm{ggT}(a,b) = 1$. Damit ist $1 \in M_{a,b}$.

Aufgabe 11 (3 Punkte)

Bestimmen Sie ein primitives Element in $\mathbb{Z}_3[x]/(2x^2 + 2)$. Weisen Sie nach, daß es sich wirklich um ein solches handelt.

Lösung. Wir versuchen zunächst $[x]$. Man sieht aber schnell, daß $[x]^4 = [1]$. Also $[x]$ ist kein primitives Element. Jetzt nehmen wir $[x+1]$. Die Potenzen $[x+1]^i$ für $0 \leq i \leq 7$ sind der Reihe nach: $[x+1]$, $[2x]$, $[2x+1]$, $[2]$, $[2x+2]$, $[x]$, und $[x+2]$. Damit haben wir alle von Null verschiedene Restklassen erhalten. Folglich ist $[x+1]$ ein primitives Element.