Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

WS 1998/99
Übungsklausur mit Lösungen
8. Januar 1999

Diskrete Strukturen I

Aufgabe 1 (2 Punkte)

52 Spielkarten (4×13 Karten) werden gut gemischt und im Stapel auf den Tisch gelegt. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Karten so zu mischen, daß die oberste und die unterste Karte ein Ass ist?

Lösung. Es gibt 4 Möglichkeiten das obere Ass und 3 Möglichkeiten das untere zu wählen. Die restlichen 50 Karten können dann beliebig permutiert werden. Insgesamt gibt es also $4 \cdot 3 \cdot 50!$ Möglichkeiten.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Koeffizienten von wx^4y^3z in $(w+x+y+z)^9$.

(b) Sei $p \geq 2$ eine Primzahl. Bestimmen Sie die höchste Potenz von p, die $(p^6)!$ teilt.

Lösung.

(a) Der Koeffizient von wx^4y^3z ist die Anzahl der Möglichkeiten eine Position aus 9 möglichen für w zu wählen, dann aus dem Rest 4 Positionen für x, dann 3 Positionen für y und schließlich eine Position für z. Insgesamt gibt es also

$$\binom{9}{1}\binom{8}{4}\binom{4}{3} = 2520.$$

(b) Im Produkt $p^6 \cdot (p^6-1) \cdot \ldots \cdot p \cdot (p-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ sind die Zahlen $p, 2p, \ldots, p \cdot p^5$, insgesamt p^5 viele, durch p teilbar. Außerdem sind die Zahlen $p^2, 2p^2, \ldots, p^4 \cdot p^2$, insgesamt p^4 viele, durch p^2 teilbar, usw. Die Gesamtanzahl der Faktoren p in $(p^6)!$ ist also

$$p^5 + p^4 + \ldots + p + 1 = \frac{p^6-1}{p-1}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien A_1 und A_2 Teilmengen aus $[n]$. Wir schreiben $A_1 \preceq A_2$, wenn alle Elemente in A_2 größer oder gleich sind als alle Elemente in A_1 (z.B. $\{1,2\} \preceq \{3,5\}$ aber $\{1,3\} \not\preceq \{2,4\}$). Bestimmen Sie die Anzahl der Partitionen $A_1, \ldots, A_k$ einer n elementigen Menge in k Teile, wobei für jedes Paar i,j gilt $A_i \preceq A_j$ oder $A_j \preceq A_i$.

Lösung. Sei $A_1, \ldots, A_k$ eine solche Partition. Die Teilmengen können in aufsteigender Reihenfolge $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ (bzgl. $\preceq$) sortiert werden. Dann gilt $A_{i_1} = \{1, \ldots, |A_{i_1}|\}$, $A_{i_2} = \{|A_{i_1}| + 1, \ldots, |A_{i_1}| + |A_{i_2}|$, usw. Jede solche Partition kann erhalten werden, indem die ersten Elemente von $A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ gewählt werden (das erste Element von $|A_{i_1}|$ ist 1). Dafür gibt es $\binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten (1 darf nicht mehr genommen werden).

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ gilt

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}.$$

Lösung. Die linke Seite zählt die Anzahl der Paare (A, B) von disjunkten Mengen, $A, B \subseteq [n]$, so daß $|A \cup B| = m$. Wenn wir zu jedem Paar (A, B) die Vereinigung $A \cup B$ betrachten, so kommt jede m elementige Teilmenge C von $[n]$ genau 2^m mal vor, denn C kann durch die Paare $(A, C \setminus A)$ dargestellt werden, wobei A alle Teilmengen von C durchläuft.

Aufgabe 5 (1+2+2 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet mit 3 Symbolen. Aus diesem Alphabet werden durch Konkatenation (Operator $*$) Wörter der Länge n gebildet.

(a) Wieviele Wörter können insgesamt gebildet werden?

(b) Wieviele Wörter können gebildet werden, wenn jedes Symbol mindestens einmal vorkommen soll?

(c) Wieviele Wörter können gebildet werden, wenn $*$ kommutativ ist (d.h. z.B. $a * b * a * c = a * a * b * c$)?

Lösung.

(a) Es gibt 3^n solche Wörter (im Bälle–Urnen Modell haben wir 3 unterscheidbare Bälle und n unterscheidbare Urnen).

(b) Zu jedem Wort betrachten wir die Menge A der Positionen, an denen a's stehen. Analog bilden wir die Mengen B und C. Offensichtlich ist A, B, C eine Partition von $[n]$ in drei Teilmengen. Insgesamt kommt jede Partition 3! Mal vor (Anzahl der Zuordnungen von Buchstaben zur ersten, zweiten und dritten Teilmenge). Die Gesamtanzahl ist $3! S_{n,3}$. Im Bälle–Urnen Modell haben wir 3 unterscheidbare Urnen und n unterscheidbare Bälle, wobei jede Urne mindestens einen Ball enthalten muß.

(c) Wir ziehen mit Zurücklegen n Elemente aus 3. Dafür gibt es $\binom{n+2}{2}$ Möglichkeiten. Im Bälle–Urnen Modell haben wir n nicht unterscheidbare Bälle (jeder Ball steht für ein Vorkommen eines Buchstaben) und 3 unterscheidbare Urnen (die Buchstaben selbst).

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Eine Menge $A \subseteq [n]$ heißt *minimumsbeschränkt*, wenn für alle $a \in A$ gilt $a \geq |A|$. Bestimmen Sie eine Formel für die Anzahl aller minimumsbeschränkten Teilmengen aus $[n]$.
Hinweis: Stellen Sie eine Rekursionsformel auf.

Lösung. Sei m_n die gesuchte Anzahl. Wir teilen alle minimumsbeschränkten Mengen in zwei Klassen auf. In der ersten Klasse sind solche Mengen A, die n enthalten. Nun betrachten wir die Menge $A - \{n\}$. Falls sie nicht leer ist, enhält sie die Zahl 1 nicht, sonst wäre $A \cup \{n\}$ nicht minimumsbeschränkt. Wenn von jedem Element 1 abgezogen wird, so entsteht eine minimumsbeschränkte Menge aus $[n-2]$. Auf diese Weise erhalten wir alle m_{n-2} solche Mengen.

Die Mengen der zweiten Klasse enthalten n nicht und sind somit minimumsbeschränkte Mengen aus $[n-1]$.

Für die Gesamtanzahl der minimumsbeschränkten Mengen gilt also die Rekursion $m_n = m_{n-1} + m_{n-2}$, wobei $m_0 = 1$ und $m_1 = 2$ ($\emptyset$ ist per Definition minimumsbeschränkt). Wenn F_n die n-te Fibonacci Zahl ist, dann gilt $m_n = F_{n+2}$.

Aufgabe 7 (2+3 Punkte)

(a) Wieviele Blätter hat der Baum mit dem Prüfer-Code

$$(2, 2, 3, 5, 1, 2, 3, 5, 3)?$$

(b) Wie sieht dieser Baum aus?

Lösung.

(a) Die Gesamtanzahl der Knoten im Baum ist die Länge des Codes plus 2, also 11. Blätter sind genau diejenigen Knoten, die im Prüfer-Code nicht vorkommen. Der Baum hat 7 Blätter.

(b) Der in der Vorlesung vorgestellte Algorithmus liefert den folgenden Baum:

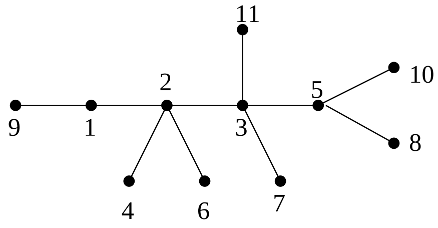

Abbildung 1:

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, der kein Baum ist, und $v \in V$ ein Knoten. In v werden DFS und BFS gestartet, die zwei Spannbäume $T_D = (V, E_D)$ und $T_B = (V, E_B)$ von G erzeugen. Beweisen oder widerlegen Sie: Der Graph $(V, E_D \cup E_B)$ enthält einen Kreis.

Lösung. Es ist klar, daß wenn $E_D \neq E_B$, so muß $(V, E_D \cup E_B)$ einen Kreis enthalten (Bäume sind kantenmaximal kreisfrei, Übungsblatt 5, Aufgabe 2).

Wir beweisen, daß $(V, E_D \cup E_B)$ einen Kreis enthält. Da G einen Kreis enthält, gibt es eine Kante $\{u, w\}$ in $E \setminus E_B$, so daß der Pfad von u nach w in T_B zusammen mit $\{u, w\}$ einen Kreis K bildet. Sei v_B, bzw. v_D, derjenige Knoten, der von BFS, bzw. DFS, in K als erster besucht wird. Falls $v_D = v_B$, dann gilt $E_D \neq E_B$, denn T_B enthält beide zu v_B inzidente Kanten, aber T_D nur genau eine.

Nun betrachten wir zwei Fälle.

1. Fall $v \in K$: Dann enthält $(V, E_D \cup E_B)$ einen Kreis (s.o.).

2. Fall $v \notin K$: Dann enthält $(V, E_D \cup E_B)$ einen Kreis $v, \ldots, v_B, \ldots, v_D, \ldots, v$, wobei der Weg von v zu v_D in T_B läuft und von v_D zu v in T_D.

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $|V|/geq2$. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$G \text{ ist ein Baum} \quad \Longleftrightarrow \quad \min_{v \in V} deg(v) \geq 1 \;\text{ und }\; \sum_{v \in V} deg(v) = 2(|V| - 1).$$

Lösung. Die Implikation $\Rightarrow$ folgt sofort aus der Tatsache, daß ein Baum zusammenhängend ist und $n - 1$ Kanten enthält.

Um die Umkehrung zu bewesen, sei $\min_{v \in V} deg(v) \geq 1$ und $\sum_{v \in V} deg(v) = 2(|V| - 1)$. Die Anzahl der Kanten in G ist $|V| - 1$. Der Graph

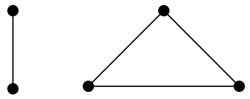

Abbildung 2:

erfüllt die Bedingung, ist aber kein Baum. Somit gilt nur eine Implikation.

Aufgabe 10 (2 Punkte)

Entscheiden Sie, ob der folgende Graph planar ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

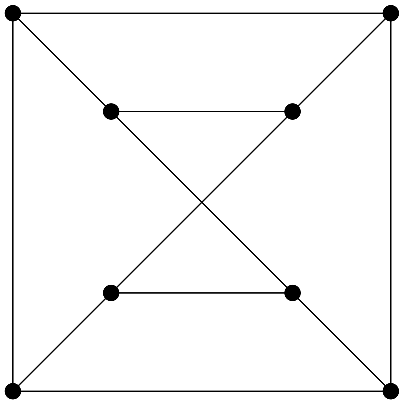

Abbildung 3:

Lösung. Der Graph ist nicht planar. Wir betrachten den Graphen $K_{3,3}$ in der folgenden Abbildung.

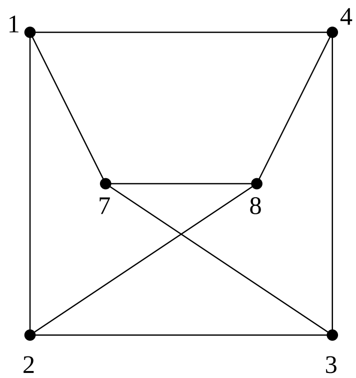

Abbildung 4:

Wir fügen auf der Kante $\{3, 7\}$ den Knoten 5 ein und auf der Kante $\{2, 8\}$ wird der Knoten 6 eingefügt.

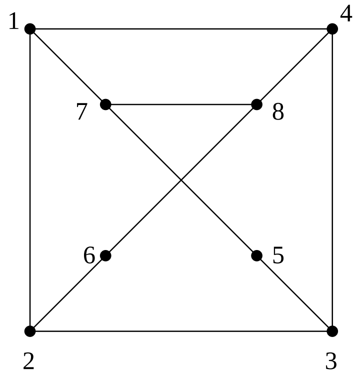

Abbildung 5:

Dieser Graph ist ein Teilgraph des ursprünglichen Graphen. Dieser enthält also eine Unterteilung von $K_{3,3}$. Die Behauptung folgt nach dem Satz von Kuratowski.

Aufgabe 11 (3 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie: Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gibt es eine Reihenfolge der Knoten, für die der Greedyalgorithmus genau $\chi(G)$ Farben verwendet.

Lösung. Sei G ein Graph. Der Greedyalgorithmus betrachtet alle Knoten in einer bestimmten Reihenfolge und jeder Knoten erhält die kleinste zulässige Farbe. Sei $C_1, \dots, C_{\chi(G)}$ eine Partition der Knotenmenge entsprechend einer Färbung von G mit $\chi(G)$ Farben. Wenn der Greedyalgorithmus zunächst alle Knoten aus C_1 betrachtet, dann alle aus C_2, usw., so verwendet er genau $\chi(G)$ Farben.