Aufgabe: mn Objekte sollen so in m Kisten verteilt werden, daß jede Kiste genau n der Objekte enthält. Auf wieviele Arten geht dies, wenn

a) die Objekte und die Kisten unterscheidbar sind,
b) nur die Objekte unterscheidbar sind, bzw.
c) weder die Objekte noch die Kisten unterscheidbar sind.

Beispiel: $m = 2, n = 2$

a) Die Objekte seien die Zahlen 1,2,3,4. Die Kisten seien K_1 und K_2. Ausprobieren führt zu folgenden Möglichkeiten:

K_1: 1,2 K_2: 3,4
K_1: 1,3 K_2: 2,4
K_1: 1,4 K_2: 2,3
K_1: 2,3 K_2: 1,4
K_1: 2,4 K_2: 1,3
K_1: 3,4 K_2: 1,2

b) Die Objekte seien wieder die Zahlen 1,2,3,4. Da die Kisten nicht unterscheidbar sind, besteht die Aufteilung jetzt nur aus einer Aufteilung der Objekte in zwei Klassen mit je zwei Elementen. Also:

1,2 | 3,4
1,3 | 2,4
1,4 | 2,3

c) Die vier Objekte seien a, a, a und a. Es gibt also nur eine Aufteilung der Objekte in zwei Klassen mit je zwei Elementen:

$$a, a \mid a, a$$

Aufgabe: Bestimme das Inverse von 347 in Z_{1478}.

Zur Erinnerung:

- Der erweiterte Euklidische Algorithmus bestimmt für zwei Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit ggT$(m, n) = xm + yn$.
- Sind a, n Zahlen mit ggT$(a, n) = 1$ und x, y die Zahlen des erweiterten Euklidischen Algorithmus, so ist x das Inverse von a in $\mathbb{Z}_n^*$.

Aufgabe: Beweisen oder widerlegen Sie:

Für alle Primzahlen p gilt:

$$\{a \in \mathbb{Z}_p^* \mid a^{-1} = a\} = \{1, p - 1\}.$$

Aufgabe: Beweisen oder widerlegen Sie: Jeder hamiltonsche 3-reguläre Graph hat chromatischen Index 3.

Zur Erinnerung:

- Ein *Hamiltonkreis* in einem Graphen ist ein Kreis, der alle Knoten durchläuft.
- Ein Graph heißt *hamiltonsch*, falls er einen Hamiltonkreis enthält.
- Ein Graph heißt *3-regulär*, falls alle Knoten Grad genau 3 haben.
- Eine *Kantenfärbung* eines Graphen $G = (V, E)$ mit k Farben ist eine Abbildung $c : E \to \{1, 2, \ldots, k\}$, so daß je zwei inzidente Kanten verschieden gefärbt sind.
- Der *chromatische Index* eines Graphen ist die kleinste natürliche Zahl k, für die es eine Kantenfärbung von G mit k Farben gibt.

Aufgabe: Bestimmen Sie ein primitives Element in $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x^2 + 1)$.

Zur Erinnerung:

- Ein *primitives Element* eines endlichen Körpers K ist ein Generator der multiplikativen Gruppe von K. D.h.,

$$\alpha \text{ primitives Element} \qquad \Longleftrightarrow \qquad K \setminus \{0\} = \{\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{|K|-1}\}.$$

- **Satz:** Jeder endliche Körper enthält ein primitives Element.

- $K[x]/\pi(x) = \{[f(x)]_\pi \mid f(x) \text{ Polynom in } K[x] \text{ mit grad}(f) < \text{grad}(\pi)\}$.
  Also

$$\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x^2 + 1) = \{[0], [1], [x], [x + 1], [x^2], [x^2 + 1], [x^2 + x], [x^2 + x + 1]\}.$$

Aufgabe: Drei verschiedenfarbige Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wieviele verschiedene Ergebnisse gibt es?

Aufgabe: Drei identische (ununterscheidbare) Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wieviele verschiedene Ergebnisse gibt es?

Aufgabe: Achtzehn verschiedenfarbige Bälle sollen so in sieben ununterscheidbare Urnen plaziert werden, daß jede Urne mindestens einen Ball enthält. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

Aufgabe: Auf wieviel Arten können zehn verschiendene Jobs auf vier Rechner verteilt werden, so daß der rechenaufwendigste Job dem schnellsten Rechner zugeordnet wird und jeder Rechner mindestens einen Job erhält?

Zur Erinnerung: "*Ball-and-Bins Schema*"

Aufgabe: Beweisen Sie: Sind p und q zwei Primzahlen, so gilt $\phi(pq) = (p-1)(q-1)$.

Zur Erinnerung:

- *Eulersche Phi-Funktion*:

$$\phi(n) := |\mathbb{Z}_n^*|,$$

  wobei

$$\mathbb{Z}_n^* = \{a \mid a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \text{ggT}(a,n) = 1\}.$$

- Prinzip der Inklusion und Exklusion:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \left(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} |\bigcap_{j=1}^{r} A_{i_j}| \right).$$

Aufgabe: Beweisen oder widerlegen Sie:
Jeder planare Graph enthält einen Knoten mit Grad ≤ 5.

Zur Erinnerung:

- Ein Graph heißt *planar*, wenn er sich so zeichnen läßt, daß sich keine Kanten "kreuzen".
- **Satz:** $G = (V, E)$ planar, $|V| \geq 3 \implies |E| \leq 3|V| - 6$.

Aufgabe: Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| \geq 3$.
Beweisen oder widerlegen Sie:

$G = (V, E)$ planar und bipartit $\iff |E| \leq 2|V| - 4.$

Aufgabe: Sei G eine Gruppe. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$C(G) := \{x \in G \mid xg = gx \text{ für alle } g \in G\}$$

ist eine Untergruppe von G.

Zur Erinnerung: Sei $\langle G \circ \rangle$ eine Gruppe. Um zu zeigen, daß H eine Untergruppe von G ist, ist nachzuprüfen, daß

- $H \subseteq G$,
- H bezüglich der Gruppenoperation $\circ$ selbst eine Gruppe ist.

Um zu zeigen, daß $\langle G \circ \rangle$ eine Gruppe ist, muß man nachweisen, daß

- G bezüglich $\circ$ abgeschlossen ist,
- das Assoziativgesetz gilt,
- es ein neutrales Element gibt und
- jedes Element ein Inverses hat.

Aufgabe: Sei G eine endliche Gruppe und $b \in G$ beliebig. Dann gilt:

$$\text{ord}(b^t) = \frac{\text{ord}(b)}{\text{ggT}(\text{ord}(b), t)}.$$