Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

WS 1998/99
Übungsblatt 1
3. Nov. 1998

Diskrete Strukturen I

(Abgabetermin: Dienstag, 11. Nov. 1998, vor der Vorlesung)

Aufgabe 1

Kann das in der folgenden Abbildung dargestellte „angeknabberte“ Schachbrett vollständig mit 2×1 Dominosteinen bedeckt werden? (Beschreiben Sie eine Überdeckung oder beweisen Sie, daß keine solche existiert).

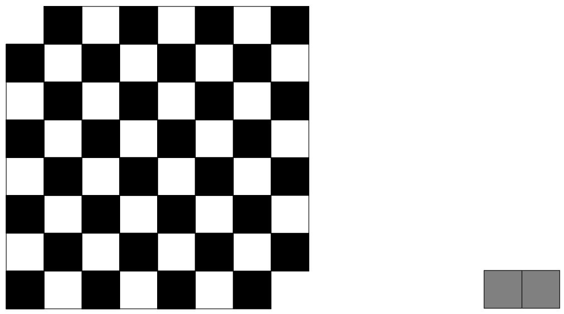

Abbildung 1:

Aufgabe 2

Die Summe der Kehrwerte der ersten n natürlichen Zahlen bezeichnet man als n-te Harmonische Zahl H_n:

$$H_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $H_1 + H_2 + \ldots H_n = (n+1)H_{n+1} - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $H_{2^n} \leq n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3

Finden Sie den Fehler in der folgenden Argumentation:

Behauptung: Alle Menschen sind gleich groß.

Beweis: Wir zeigen durch Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Je n Personen sind gleich groß.

I.A. $(n = 1)$ Klar.

I.S. $(n \to n+1)$ Betrachte eine beliebige Menge $X = \{P_1, \ldots, P_{n+1}\}$ von $n+1$ Personen. Diese zerlegen wir in zwei Teilmengen Y und Z, so daß gilt: $X = Y \cup Z$, $|Y \cap Z| = 1$ und $|Y|, |Z| < |X|$. Wegen $|Y| < |X|$ gilt nach Induktionsannahme, daß alle Personen in Y gleich groß sind. Analog folgt, daß alle Personen in Z gleich groß sind. Wegen $|Y \cap Z| = 1$ gibt es eine Person, die sowohl zu Y als auch zu Z gehört. Ohne Einschränkung sei dies P_1. Es sind also alle Personen in Y genauso groß wie P_1 und ebenso alle Personen in Z. Wegen $Y \cup Z = X$ folgt, daß alle $n+1$ Personen in X gleich groß sind. Dies war zu zeigen.

Aufgabe 4

Machen Sie sich mit Maple V vertraut (vgl. Hinweise auf der Web-Seite) der Vorlesung. Erzeugen Sie anschließend eine html-Seite ähnlich der auf der Übungsseite eingehängten und schicken Sie diese (oder einen Verweis darauf) per email an Ihren Tutor.

Challenge Aufgabe 1

Sei M eine Menge. Eine Färbung von M mit den Farben rot und blau ist eine Abbildung von M nach $\{\text{rot}, \text{blau}\}$. Beweisen Sie die folgende Aussage: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: Für *jede* Färbung der zweielementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 4^k\}$ mit den Farben rot und blau gibt es eine Teilmenge $X \subseteq \{1, 2, \ldots, 4^k\}$, $|X| = k$, so daß *alle* zweielementigen Teilmengen von X gleichgefärbt sind (also entweder alle rot oder alle blau).