Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

WS 1998/99
Übungsblatt 3
17. Nov. 1998

Diskrete Strukturen I

(Abgabetermin: Dienstag, 24. Nov. 1998, vor der Vorlesung)

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie den Koeffizienten von t^3xy^4z in $(x+y+z+t)^9$.

(b) Wieviele verschiedene Stellungen gibt es bei dem Spiel TIC TAC TOE nach 4 Zügen (d.h, wenn jeder Spieler zweimal gesetzt hat)? Der erste Zug muß nicht in der Mitte liegen.

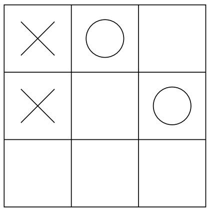

Abbildung 1: Möglicher Stand nach 4 Zügen

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$S_{n,2} = 2^{n-1} - 1 \qquad \text{und} \qquad S_{n,n-2} = \frac{1}{24} n * (n-1) * (n-2) * (3n-5).$$

(b) Die sogenannte n-te Bellzahl B_n bezeichnet die Anzahl Partitionen einer n-elementigen Menge. Es gilt also

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S_{n,k} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei man $B_0 = 1$ setzt.

Zeigen Sie, daß für die Bellzahlen die Rekursion

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \qquad \text{für alle } n \geq 1$$

erfüllt ist.

Aufgabe 3

(a) Auf wieviele Arten kann ein König von der linken unteren Ecke eines (normalen 8×8) Schachbrettes zur rechten oberen ziehen, wenn er stets nach oben oder nach rechts zieht?

(b) Auf wieviele Arten kann ein König von der linken unteren Ecke eines (normalen 8×8) Schachbrettes zur rechten oberen ziehen, wenn er stets nach oben, nach rechts oder diagonal nach rechts oben zieht?

Begründen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 4

Schreiben Sie eine Maple-Prozedur `ListP(n,k)`, die alle Darstellungen von n als Summe von k natürlichen Zahlen ausgibt. (Jede Darstellung soll dabei natürlich nur einmal ausgegeben werden!)

Beispiel: Bei Aufruf von ListP(6,3) sollte $[[1,1,4],[1,2,3],[2,2,2]]$ (ggf. in anderer Reihenfolge) ausgegeben werden.

Hinweis: Eine Möglichkeit die Aufgabe zu lösen, ist die Funktion rekursiv zu berechnen. Dabei könnte die Maplefunktion `applyop` hilfreich sein.

Beispiel: `addonetofirst := y -> applyop(t->t+1,1,y);` addiert zum ersten Element einer List eins hinzu.

Challenge Aufgabe 3

(a) Schreiben Sie eine Maple-Prozedur ListP2(n,k), die alle Darstellungen von n als Summe von natürlichen Zahlen ausgibt, wobei der größte der Summanden genau k sein soll. (Jede Darstellung soll dabei natürlich nur einmal ausgegeben werden!)

Beispiel: Bei Aufruf von ListP2(6,3) sollte $[[1,1,1,3],[1,2,3],[3,3]]$ (ggf. in anderer Reihenfolge) ausgegeben werden.

(b) Wir bezeichnen mit $\hat{P}_{n,k}$ die Anzahl der (ungeordneten) Partitionen der Zahl n in Summanden, deren größter genau k ist. Bestimmen Sie eine (möglichst einfache) Möglichkeit, die Werte $\hat{P}_{n,k}$ aus den Werten $P_{n,k}$ zu berechnen. D.h., gesucht ist ein Ausdruck $\hat{P}_{n,k} = ...$, wobei auf der rechten Seite Werte $P_{n,i}$ vorkommen dürfen, aber kein Wert $\hat{P}_{n,i}$.