Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

WS 1998/99
Übungsblatt 5
8. Dez. 1998

Diskrete Strukturen I

(Abgabetermin: Dienstag, 8. Dez. 1998, vor der Vorlesung)

Aufgabe 1

Zeigen Sie, daß es in *jedem* Graphen $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, zwei Knoten $x, y \in V$ gibt, mit $deg(x) = deg(y)$.

Aufgabe 2

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n$ Knoten und $|E| = m$ Kanten. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) G ist ein Baum.

(b) G ist zusammenhängend und es gilt $m = n - 1$.

(c) G ist kreisfrei und es gilt $m = n - 1$.

(d) G ist (kanten-)maximal kreisfrei. (D.h., G ist kreisfrei und für alle Kanten $e \in \binom{V}{2} \setminus E$ enthält der Graph $(V, E \cup \{e\})$ einen Kreis.)

(e) G ist (kanten-)minimal zusammenhängend. (D.h., G ist zusammenhängend und für alle Kanten $e \in E$ ist der Graph $(V, E \setminus \{e\})$ nicht mehr zusammenhängend.)

(f) Je zwei Knoten aus V sind in G durch genau einen Pfad verbunden.

Aufgabe 3

Eine *Brücke* in einem zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kante $e \in E$, so daß der Graph $(V, E \setminus \{e\})$, der aus G durch Entfernen der Kante e entsteht, nicht mehr zusammenhängend ist.
Zeigen Sie:

(a) Ist e eine Brücke, so ist e in keinem Kreis enthalten.

(b) Haben alle Knoten in G geraden Grad, so enthält G keine Brücke.

Aufgabe 4

Schreiben Sie ein Programm (in C++, Java, Maple, usw.), das als Eingabe zwei Felder x und y eines normalen 8×8 Schachbrettes erhält und als Ausgabe die Anzahl der Züge eines kürzesten Weges liefert, mit der ein Springer von x nach y kommen kann.

Eingabe-Spezifikation: Das Eingabefile enthält mehrere Testfälle. Jeder Testfall besteht aus einer Zeile wie unten angegeben.

Ausgabe-Spezifikation: Für jeden Testfall ist eine Zeile der Form „Um von xx nach yy zu gelangen, benötigt ein Springer n Züge." auszugeben.

```
Beispiel-Eingabe:  e2 e4
                   a1 b2
                   b2 c3
                   a1 h8
                   a1 h7
                   h8 a1
                   b1 c3
                   f6 f6
```

```
Beispiel-Ausgabe

Um von e2 nach e4 zu gelangen, benötigt ein Springer 2 Züge.
Um von a1 nach b2 zu gelangen, benötigt ein Springer 4 Züge.
Um von b2 nach c3 zu gelangen, benötigt ein Springer 2 Züge.
Um von a1 nach h8 zu gelangen, benötigt ein Springer 6 Züge.
Um von a1 nach h7 zu gelangen, benötigt ein Springer 5 Züge.
Um von h8 nach a1 zu gelangen, benötigt ein Springer 6 Züge.
Um von b1 nach c3 zu gelangen, benötigt ein Springer 1 Züge.
Um von f6 nach f6 zu gelangen, benötigt ein Springer 0 Züge.
```

Challenge Aufgabe 5

Anfang Dezember treffen sich $2n$ Personen, um die Veranstaltungen am Nikolausabend zu planen. Der Tradition folgend sollen an diesem Abend jeweils zwei Personen (als Nikolaus bzw. Knecht Ruprecht verkleidet) eine Familie aufsuchen. Zunächst teilen sie sich in zwei Gruppen zu je n Personen auf und beschließen, daß die Personen in der ersten Gruppe jeweils ein Nikolauskostüm bekommen, während die Personen der zweiten Gruppe jeweils als Knecht Ruprecht auftreten werden. Zusätzlich verabreden sie, daß jeder Nikolaus mit jedem Knecht Ruprecht höchstens eine Familie aufsuchen soll, und daß keine vier Personen zusammen mehr als drei Familien besuchen sollen.

Mit $N(n)$ bezeichen wir die maximale Anzahl von Familien, die die $2n$ Personen gemäß dieser Spielregeln besuchen können. Zeigen Sie: $N(n) \leq n^{3/2} + n$