Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

WS 1998/99
Übungsblatt 7
22. Dez. 1998

Diskrete Strukturen I

(Abgabetermin: Dienstag, 22. Dez. 1998, vor der Vorlesung)

Aufgabe 1

Beweisen Sie, daß jeder k-reguläre bipartite Graph G chromatischen Index $\chi'(G) = k$ hat. (Mit anderen Worten: er besitzt eine Kantenfärbung mit k Farben, so daß je zwei inzidente Kanten verschieden gefärbt sind.)

Aufgabe 2

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und M ein Matching in G. Ein Pfad in G heißt *M-alternierend*, falls er abwechselnd Kanten aus M und Kanten aus $E \setminus M$ enthält. Ein Pfad in G heißt *M-augmentierend*, falls er M-alternierend ist, mehr Kanten aus $E \setminus M$ als aus M enthält und die Endknoten des Pfades werden von M nicht überdeckt. Zeigen Sie:

(a) Ist M ein Matching und P ein M-augmentierender Pfad, dann ist die symmetrische Differenz $M \Delta P$ wiederum ein Matching.

(b) Sind M_1 und M_2 zwei Matchings in G mit $|M_1| > |M_2|$, dann gibt es einen M_2-augmentierenden Pfad in G.

Aufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie: Für jeden bipartiten Graphen $G = (A \cup B, E)$ gilt:

$$\max\{|M| \mid M \text{ Matching in } G\} = |A| - \max\{|X| - |\Gamma(X)| \mid X \subseteq A\}.$$

Aufgabe 4

Gegeben sind n Paare $T_i = (p_i, d_i)$ von natürlichen Zahlen und eine natürliche Zahl $m \leq n$. Für eine Teilmenge $I \subset [n]$, mit $|I| = m$, sei $P(I) := \sum_{i \in I} p_i$, bzw. $D(I) := \sum_{i \in I} d_i$. Eine Menge von m Paaren $\{T_{i_1}, \ldots, T_{i_m}\}$ heißt *m-optimal*, wenn $|P(\{i_1, \ldots, i_m\}) - D(\{i_1, \ldots, i_m\})|$ unter allen m-elementigen Teilmengen von $[n]$ minimal ist. Falls es mehrere Möglichkeiten gibt, so soll aus diesen eine Teilmenge ausgewählt werden, für die $P(\{i_1, \ldots, i_m\}) + D(\{i_1, \ldots, i_m\})$ maximal ist.

Schreiben Sie ein Programm (Java, C++, Maple, Mathematica) zur Auswahl einer optimalen Teilmenge. Das Eingabefile enthält in der ersten Zeile zwei Zahlen n und m, $1 \leq n \leq 200$, $1 \leq m \leq 20$, $m \leq n$. Es folgen n Zeilen mit Paaren p_i und d_i, $1 \leq p_i, d_i \leq 20$. Das Programm soll den Satz ausgeben: „Die optimale Menge hat die Werte P = ... , D = ... , und besteht aus folgenden Paaren:", gefolgt von einer Liste der Indizes der ausgewählten Paare.
Das Programm darf auf den HP-Halle Rechnern für den Datensatz `jury.in` (siehe WWW-Seite) höchstens 60 Sekunden benötigen.

Challenge Aufgabe 7

Beweisen oder widerlegen Sie: Für jeden (ungerichteten) Graphen $G = (V, E)$ gilt: Falls $\chi(G) = k$, so lassen sich die Kanten des Graphen $G = (V, E)$ so orientieren, daß in dem dadurch entstehenden Digraphen der längste gerichtete Pfad die Länge höchstens k hat.