Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 1998/99
Quiz 1
23. Dezember 1998

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen

Quiz

1. Wie lautet das charakteristische Polynom für die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit

$$a_n = 3^n - 2^{n-1} + 3n - 1 \ ?$$

Antwort: Das charakteristische Polynom läßt sich ablesen an seinen Wurzeln 3, 2 und 1 (letztere mit Vielfachheit 2). Daher: $p(x) = (x-3)(x-2)(x-1)^2$.

2. Lösen Sie (bis auf ein additives O(1)) die Rekursionsgleichung

$$T(n) = T(n/2) + 3n^2 \ , \ T(1) = 1.$$

Antwort: Durch Expandieren erhält man $T(n) = 3n^2 + 3\frac{n^2}{4} + 3\frac{n^2}{16} \cdots = 4n^2 - 3$.

3. Wie lauten die obere und die untere Schranke für die Höhe eines (a,b)-Baums mit n Blättern?

Antwort: Wegen $2a^{h-1} \leq n \leq b^h$ (siehe Definition (a,b)-Baum) folgt

$$\log_b(n) \leq h \leq 1 + \log_a(\frac{n}{2}).$$

4. Warum ist die Höhe eines rot-schwarz-Baums logarithmisch in der Anzahl seiner Blätter?

Antwort: In der Vorlesung wurde gezeigt, wie ein rot-schwarz-Baum aus einem $(2,4)$-Baum aufgebaut werden kann. Dabei entspricht die Schwarztiefe des rot-schwarz-Baums der Tiefe des $(2,4)$-Baums. Andererseits ist die Höhe eines rot-schwarz-Baums höchstens das Doppelte seiner Schwarztiefe. Ein rot-schwarz-Baum ist ein Binärbaum.

5. Wieviel kostet die Initialisierung eines Binomial Heap durch n sukzessive Insert-Operationen, beginnend mit dem leeren Heap?

Antwort: Laut Vorlesung sind diese Kosten gleich den Kösten des binären Zählens von 0 bis n, wobei ein Zählschritt und ein Übertrag je 1 Zeiteinheit kosten. Damit erhält man die Abschätzung O(n) (siehe ruler function).

6. Wie setzt sich die amortisierte Komplexität zusammen?

   Antwort: Nach unserer bereits oft verwendeten Definition gilt:

   $$\text{amortisierte Kosten} = \text{tatsächliche Kosten} + \text{Potentialdifferenz.}$$

7. Was ist bei Fibonacci-Heaps die amortisierte Komplexität von DecreaseKey ?

   Antwort: Wie in der Vorlesung vorgeführt, erreicht man amortisiert O(1).

8. Wie groß sind bei Fibonacci-Heaps die (reelen) worst-case-Kosten für DeleteMin ?

   Antwort: Ohne Berücksichtigung der Potentialänderung erhält man $O(n)$.

9. Bis auf welchen Faktor ist Move-to-front optimal für eine Sequenz von Access-, Insert- und Delete-Operationen?

   Antwort: Mit Hilfe einer über die Anzahl der Inversionen der Liste bzgl. eines beliebigen (z.B. optimalen) Algorithmus haben wir gesehen: Faktor 2.

10. Nenne Sie mindestens fünf verschiedene Arten von Suchbäumen.

    Antwort: Natürliche Suchbäume, (a, b)-Bäume, rot-schwarz-Bäume, AVL-Bäume, Leftist Trees, Splay Trees, etc.

11. Geben Sie eine obere Schranke für die Höhe eines Splay Tree mit n Elementen an.

    Antwort: Man kann Splay Trees linear entarten lassen. Daher: $n - 1$.