Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1999
Antworten Quiz 1
25. Juni 1999

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1

Sei $\Omega = \{0,1\}^3$, jede Folge $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$ sei gleich wahrscheinlich.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{\omega | \omega_2 = \omega_3 = 1\} && \text{(symbolisch `*11')} \\
A_2 &= \{\omega | \omega_1 = \omega_3 = 1\} && \text{(symbolisch `1*1')} \\
A_3 &= \{\omega | \omega_1 = \omega_2 = 1\} && \text{(symbolisch `11*')}
\end{aligned}$$

a) Sind $\{A_1, A_2, A_3\}$ unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Wie lautet die Siebformel für $\Pr[A_1 \cup A_2 \cup A_3]$?

c) Wie groß ist $\Pr[A_1 \cup A_2 \cup A_3]$?

Lösung

Offensichtlich ist $\Pr[A_i] = 1/4$. Weiter ist $\Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = 1/8 \neq 1/64 = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot \Pr[A_3]$, und für $i \neq j \in \{1,2,3\}$ ist $\Pr[A_i \cap A_j] = 1/8 \neq 1/16 = \Pr[A_i] \cdot \Pr[A_j]$.

a) Also sind die drei Ereignisse nicht unabhängig, nicht einmal paarweise.

b) Die Siebformel für drei Ereignisse lautet

$$\begin{aligned}
\Pr[A_1 \cup A_2 \cup A_3] = {} & \Pr[A_1] + \Pr[A_2] + \Pr[A_3] \\
& - (\Pr[A_1 \cap A_2] + \Pr[A_2 \cap A_3] + \Pr[A_3 \cap A_1]) \\
& + \Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3].
\end{aligned}$$

c) Setzt man die oben berechneten Werte in b ein, so folgt

$$\Pr[A_1 \cup A_2 \cup A_3] = 3 \cdot 1/4 - 3 \cdot 1/8 + 1/8 = 1/2.$$

Aufgabe 2

Wie und unter welcher Voraussetzung ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $\Pr[A|B]$ definiert?

Lösung

(Nur) für $\Pr[B] \neq 0$ ist $\Pr[A|B] := \Pr[A \cap B]/\Pr[B]$.

Aufgabe 3

Wie heißt der Satz von Bayes?

Lösung

Gegeben eine Partition des Wahrscheinlichkeitsraumes $\Omega = A_1 \dot\cup \ldots \dot\cup A_n$ mit bekannten Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A_i]$ und ein Ereignis B. Sind alle bedingten Wahrscheinlichkeiten $\Pr[B|A_i]$ bekannt, so kann man die 'andersherum bedingten' Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A_i|B]$ wie folgt ausrechnen:

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i]\Pr[A_i]}{\sum_i \Pr[B|A_i]\Pr[A_i]}.$$

Aufgabe 4

Sei X eine Bernoulli-Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Geben Sie $\mathrm{Var}[X]$ an.

Lösung

$$\mathrm{Var}[X] = p(1-p).$$

Aufgabe 5

In Urne 1 liegen 2 weiße und zwei schwarze Kugeln, in Urne 2 eine weiße und 5 schwarze Kugeln. Urne 1 werde mit WS 1/7 gewählt, anderenfalls Urne 2. Dann wird gleichverteilt eine Kugel aus der gewählten Urne gezogen.
(Es gilt also: $\Pr[S|U_1] = 1/2, \Pr[S|U_2] = 5/6, \Pr[U_1] = 1/7$.)

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $\Pr[S]$, daß eine schwarze Kugel gezogen wird?

b) Was ist die Wahrscheinlichkeit $\Pr[U_2|S]$, daß Urne 2 gewählt wurde, unter der Bedingung, daß eine schwarze Kugel gezogen wurde?

Lösung

a) Nach dem Satz über die totale WS gilt $\Pr[S] = \Pr[S|U_1]\cdot\Pr[U_1]+\Pr[S|U_2]\cdot\Pr[U_2] = 1/2\cdot 1/7 + 5/6\cdot 6/7 = 11/14$.

b) Verwende den Satz von Bayes oder rechne direkt

$$\begin{aligned}\Pr[U_2|S] &= \frac{\Pr[U_2\cap S]}{\Pr[S]} = \frac{\Pr[U_2\cap S]\Pr[U_2]}{\Pr[U_2]\Pr[S]}\\ &= \Pr[S|U_2]\frac{\Pr[U_2]}{\Pr[S]}\\ &\overset{\text{a)}}{=} 5/6\cdot 6/7\cdot 14/11\\ &= 10/11.\end{aligned}$$

Aufgabe 6

a) Seien X und Y Zufallsvariable mit bekannten Erwartungswerten $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[Y]$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y] \cdot X + 5 - Y]$.

b) Ist für Ihre Rechnung in a) die Unabhängigkeit von X und Y Voraussetzung?

c) Die Zufallsvariable Z nehme die Werte in $\{0, 1, 2, 3\}$ mit gleicher WS an. Berechnen Sie $\mathbb{E}[Z]$.

Lösung

a) Wegen der Linearität des Erwartungswertes gilt

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y] \cdot X + 5 - Y] = \mathbb{E}[Y] \cdot \mathbb{E}[X] + 5 - \mathbb{E}[Y] = 5 + (\mathbb{E}[X] - 1) \cdot \mathbb{E}[Y].$$

Man beachte, daß $\mathbb{E}[Y]$ nichts anderes als ein fester Zahlenwert ist.

b) Nein, der Erwartungswert ist immer linear.

c) $\mathbb{E}[Z] = \sum_{i \in \{0,1,2,3\}} i \cdot \Pr[Z = i] = 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/4 = 3/2$

Aufgabe 7

Wir betrachten einen Zufallsgraphen $G \in \mathcal{G}_{n,c/n}$. Es werden also im vollständigen Graphen K_n alle Kanten unabhängig mit WS $p = p(n) = c/n$ markiert, alle unmarkierten Kanten werden entfernt.

a) Berechnen Sie die den Erwartungswert der Zufallsvariable X, welche die Anzahl von Dreiecken in G zählt.

b) Schätzen Sie $\Pr[X \geq 1]$ mit der Markovungleichung ab. Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit $\Pr[X = 0]$ für $n \to \infty$?

Lösung

a) Für jede dreielementige Teilmenge M der Knotenmenge $[n] = \{1, \ldots, n\}$, in Zeichen $M \in \binom{[n]}{3}$, definieren wir die 0/1–ZV X_M. Diese ist genau dann gleich 1, wenn alle drei durch M induzierten Kanten markiert werden, also $\Pr[X_M = 1] = \Pr[\text{alle drei Kanten markiert}] = p^3$. Dann ist $X = \sum_{M \in \binom{[n]}{3}} X_M$. Wegen der Linearität des Erwartungswertes ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\textstyle\sum_{M \in \binom{[n]}{3}} X_M\right] &= \sum_{M \in \binom{[n]}{3}} \mathbb{E}[X_M] \\
&= \sum_{M \in \binom{[n]}{3}} \Pr[X_M = 1] = \binom{n}{3} \Pr[X_M = 1] \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} p^3.
\end{aligned}$$

b) $\Pr[X \geq 1] \overset{\text{Markov}}{\leq} \mathbb{E}[X] = \frac{p^3 n(n-1)(n-2)}{3!}$.

$\Pr[X = 0] = 1 - \Pr[X \geq 1] \overset{\text{s.o.}}{\geq} 1 - \frac{p^3 n(n-1)(n-2)}{3!} \geq 1 - \frac{(pn)^3}{3!} \overset{p=c/n}{=} 1 - \frac{c^3}{3!}$.

Aufgabe 8

Geben Sie die Werte der Binomialverteilung $B(j, n, 2/n)$ für $j = 0, j = 1, j = 2$ und $j = n$ an. Was ist jeweils der Grenzwert für $n \to \infty$?

Lösung

$$\binom{n}{j}(2/n)^j(1-2/n)^{n-j} = \begin{cases} (1-2/n)^n \sim e^{-2} & j = 0 \\ n(2/n)(1-2/n)^{n-1} \sim 2e^{-2} & j = 1 \\ n(n-1)/2 \cdot (2/n)^2(1-2/n)^{n-2} \sim 2e^{-2} & j = 2 \\ 1 \cdot (2/n)^n \sim 0 & j = n \end{cases}$$